COURS DE TOPOLOGIE

2e édition

G. CHOQUET

MASSON

COURS DE TOPOLOGIE
G. CHOQUET
MASSON

LICENCE ET PREMIÈRE ANNÉE DE MAÎTRISE C1

COURS DE TOPOLOGIE

Espaces topologiques et espaces métriques
Fonctions numériques
Espaces vectoriels topologiques

Gustave CHOQUET
Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie

DEUXIÈME ÉDITION
REVUE ET CORRIGÉE
Troisième tirage

MASSON

Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo
1984

Troisième tirage du
Cours d'analyse, Tome II. — Topologie

ISBN : 2-225-59972-6

MASSON S.A.	120, Bd Saint-Germain, 75280 Paris Cedex 06
MASSON PUBLISHING U.S.A. Inc.	133 East 58 th Street, New York, N.Y. 10022
MASSON S.A.	Balmes 151, Barcelona 8
MASSON ITALIA EDITORI S.p.A.	Via Giovanni Pascoli 55, 20133 Milano
MASSON EDITORES	Dakota 383, Colonia Napoles, Mexico 18 DF
EDITORA MASSON DO BRASIL Ltda	Rua Dr Cesario Motta Jr, 61, 01221 Sao Paulo S.P.

Programme de Topologie du Certificat de C1 *

EXTRAIT DU LIVRET EUROPÉEN DE L'ÉTUDIANT
(Deuxième niveau, n°s 12 et 13)

A. — TOPOLOGIE GÉNÉRALE

Topologie de $\mathbf{R}$, de $\mathbf{R}^n$; théorème de Borel-Lebesgue. Définition générale d'un espace topologique (par les ouverts ou par les fermés); exemple des espaces métriques. Fonctions continues. Produit d'espaces topologiques.

Espaces compacts; théorèmes classiques. Espaces localement compacts.

Espaces connexes; image d'un espace connexe par une application continue.

Espaces métriques (nombreux exemples). Critère de compacité des espaces métriques. Continuité uniforme; cas d'une application continue d'un espace métrique compact dans un espace métrique.

Espaces métriques complets (sans traiter de la complétion). Méthode des approximations successives.

Familles sommables dans un espace normé complet; convergence normale.

B. — ESPACES FONCTIONNELS

Distance de la convergence uniforme sur l'espace des applications dans un espace métrique; cas où ce dernier est complet; cas des applications continues.

Espaces vectoriels normés ; espaces de Banach. Exemples : norme de la convergence uniforme sur un espace vectoriel de fonctions numériques, normes diverses définies sur des espaces fonctionnels au moyen d'intégrales.

Théorème de Stone-Weierstrass, ou tout au moins théorème de Weierstrass (approximation par les polynômes).

Espaces préhilbertiens : exemples. L'espace L^2 est complet (avec l'intégrale de Lebesgue). Inégalités. Projection sur un sous-espace vectoriel complet, et plus généralement sur un convexe complet; la projection est une application contractante. Espaces préhilbertiens à base dénombrable; orthogonalisation de Schmidt. Applications : suites de polynômes spéciaux, séries de Fourier.

* Le texte reproduit ici est un extrait d'un programme destiné à l'harmonisation de l'enseignement des mathématiques en Europe; il est notablement plus détaillé que le programme officiel français correspondant, mais contient les mêmes matières.

AVERTISSEMENT

Ce livre couvre les besoins de la Licence et de la maîtrise de Mathématiques actuelle en ce qui concerne la topologie générale et les espaces fonctionnels.

C'est le développement d'un cours enseigné à Paris il y a quelques années, et dont plusieurs fascicules polycopiés ont paru aux éditions du C.D.U.

Il est destiné aux étudiants qui disposent déjà d'un bagage de connaissances équivalent à celui acquis après le premier cycle de Mathématiques. Toutefois l'exposé ne suppose presque aucune connaissance préalable.

Son but est de faire connaître, dans un cadre aussi simple que possible, quelques-uns des outils puissants de l'Analyse moderne, et leurs applications.

Les notions de base sont presque toujours présentées sous leur forme générale, après l'étude préalable d'un ou deux exemples destinés à justifier le choix des définitions. C'est ainsi qu'on aborde les espaces topologiques quelconques après une brève étude de la droite réelle; les espaces métriques ne viennent qu'ensuite, lorsque se posent des questions d'uniformité. De même les espaces vectoriels normés et les espaces de Hilbert ne viennent qu'après une étude des espaces localement convexes, dont l'importance ne cesse de grandir dans l'Analyse moderne et ses applications.

On a pris soin de préciser le champ de validité des théorèmes par des exemples et contre-exemples. Enfin de nombreux exercices, de difficulté variée permettront aux étudiants de vérifier leur bonne compréhension du cours et d'exercer leurs facultés créatrices.

Gustave CHOQUET.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I

ESPACES TOPOLOGIQUES ET ESPACES MÉTRIQUES

Introduction

La topologie générale ne constitue un corps de doctrine cohérent que depuis un demi-siècle ; elle est l'aboutissement d'un mouvement d'idées qui remonte à l'antiquité.

Les notions de limite et de continuité s'imposèrent aux mathématiciens grecs dès qu'ils tentèrent de préciser la notion de nombre. Il fallut ensuite attendre CAUCHY (1821) et ABEL (1823) pour que se clarifient les notions de suite et de série convergentes, et celle de fonction continue.

Avec RIEMANN (1851) le cadre s'élargit; dans sa leçon inaugurale « Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie », il trace un programme grandiose : L'étude de « la notion générale de grandeur plusieurs fois étendue », entendant par là non seulement les variétés à un nombre quelconque de dimensions, mais aussi les espaces de fonctions et d'ensembles.

Mais un tel programme ne pouvait pas être réalisé sans une meilleure connaissance de la droite réelle (DEDEKIND) et des fonctions numériques (RIEMANN, WEIERSTRASS), ni surtout sans un langage à la fois précis et général; c'est CANTOR (1873) qui créa ce langage et ouvrit la porte d'un monde nouveau.

Une période héroïque et féconde commence alors. Malgré l'opposition de mathématiciens hostiles aux nouvelles idées, les découvertes se succèdent, particulièrement en France (POINCARÉ, HADAMARD, BOREL, BAIRE, LEBESGUE) et en Allemagne (KLEIN, MITTAG-LEFFLER). On en vient rapidement à étudier des fonctions de lignes, et à créer une analyse fonctionnelle (ASCOLI, VOLTERRA, HILBERT) qui est un début de réalisation du programme de RIEMANN.

Mais à nouveau se manifeste le besoin d'un langage et d'un cadre adaptés à ces recherches : Les espaces métriques, définis par FRÉCHET, fournissent un outil, essentiel pour l'étude de la continuité uniforme et de la convergence uniforme, et commode aussi pour l'étude des structures topologiques. HAUSDORFF parvient à dégager d'une jungle d'axiomes, un système

axiomatique simple, qui est la pierre angulaire de la topologie générale actuelle. BANACH pose les bases de l'Analyse fonctionnelle en créant, dans le cadre des espaces vectoriels normés, des outils dont l'importance ne cesse de grandir.

Nous commencerons l'étude de la topologie générale par une étude élémentaire de la droite réelle dont les recherches modernes n'ont pas diminué l'importance. Les définitions et les énoncés des propriétés seront formulés sous une forme immédiatement généralisable aux espaces topologiques quelconques ; c'est alors dans ce cadre que nous étudierons la plupart des propriétés topologiques.

Un espace topologique peut être aussi bien une courbe, une surface, qu'un espace de courbes, de fonctions; ainsi chacun des énoncés que nous formulerons résume une foule d'énoncés particuliers et peut s'appliquer à un grand nombre de problèmes. Mais ce n'est que progressivement que l'on découvrira la grande variété des applications à l'Analyse et à la Géométrie.

De nombreux exemples illustreront les définitions et les théorèmes ; cependant certains énoncés ne seront motivés que plus tard ; aussi l'étude de la topologie générale exige-t-elle au départ un certain acte de foi, que rendra plus facile la beauté interne de cette théorie.

I. — TOPOLOGIE DE LA DROITE R

1. – Ouverts, fermés, voisinages, bornes d'un ensemble

Nous ne rappellerons pas la définition de l'ensemble **R** des nombres réels, qui a été donnée au chapitre III.

Définition 1-*1*. — ON DIT QU'UN SOUS-ENSEMBLE A DE **R** EST *OUVERT* S'IL EST VIDE OU SI, POUR TOUT $x \in A$, IL EXISTE UN INTERVALLE OUVERT CONTENANT x ET CONTENU DANS A.

Autrement dit un ouvert de **R** est un ensemble qui est une réunion d'intervalles ouverts.

De cette définition résultent les conséquences presque immédiates suivantes :

O_1 : Toute réunion (finie ou non) d'ouverts est ouverte ;

O_2 : Toute intersection *finie* d'ouverts est ouverte ;

O_3 : La droite **R** et l'ensemble vide Ø sont des ouverts.

La propriété O_1 résulte de ce que toute réunion d'ensembles dont chacun est une réunion d'intervalles ouverts est elle-même réunion d'intervalles ouverts.

Pour démontrer la propriété O_2, il suffit de la démontrer pour l'intersection de deux ouverts A, B :

Par hypothèse $$A = \bigcup_i A_i \text{ et } B = \bigcup_j B_j ,$$

où les A_i et les B_j sont des intervalles ouverts.

Donc $$A \cap B = (\bigcup_i A_i) \cap (\bigcup_j B_j) = \bigcup_{i,j} (A_i \cap B_j) .$$

Comme chacun des ensembles $A_i \cap B_j$ est vide ou est un intervalle ouvert, $A \cap B$ est bien ouvert.

Enfin la propriété O_3 est évidente.

EXEMPLES. — 1° Tout intervalle ouvert est un ensemble ouvert. 2° La réunion des intervalles ouverts $]\, n, n+1\, [$ (où $n \in \mathbf{Z}$) est un ensemble ouvert.

Par contre, un intervalle fermé $[a, b]$ n'est pas un ensemble ouvert.

Z Il est faux que l'intersection d'une infinité d'ouverts soit toujours un ouvert. Par exemple, l'intersection des intervalles ouverts $]-1/n, 1/n[$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est l'ensemble réduit au point 0, et celui-ci n'est pas ouvert.

Définition 1-2. — ON DIT QU'UN SOUS-ENSEMBLE A DE **R** EST *FERMÉ* LORSQUE SON COMPLÉMENTAIRE $\complement_R A$ EST OUVERT.

De chacune des propriétés O_1, O_2, O_3, va résulter aussitôt une propriété duale pour les fermés. Nous nous contenterons de les énoncer, leur démonstration étant immédiate :

F_1 : Toute intersection de fermés est fermée;
F_2 : Toute réunion finie de fermés est fermée;
F_3 : La droite **R** et l'ensemble vide $\emptyset$ sont des ensembles fermés.

EXEMPLE. — Tout intervalle fermé $[a, b]$ (où $a \leqslant b$) est un ensemble fermé. En effet, le complémentaire de $[a, b]$ est la réunion des deux intervalles ouverts $]\leftarrow, a\,[$ et $]\,b, \rightarrow[$, c'est donc un ensemble ouvert.

Z Il faut bien remarquer qu'un ensemble peut n'être ni ouvert ni fermé. C'est le cas de **Q** par exemple.

Définition 1-3. — ON APPELLE *VOISINAGE* D'UN POINT x DE **R** TOUT SOUS-ENSEMBLE V DE **R** CONTENANT UN OUVERT CONTENANT x.

Autrement dit, V est voisinage de x si V contient un intervalle ouvert contenant x.

Par exemple tout ensemble ouvert A est voisinage de chacun de ses points. Réciproquement tout ensemble A qui est voisinage de chacun de ses points est une réunion d'intervalles ouverts, donc est ouvert.

Si x et y sont deux points distincts quelconques tels que $x < y$, il existe un voisinage V_x de x et un voisinage V_y de y tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$; en effet, si z est un point quelconque entre x et y, il suffit de prendre

$$V_x =]\leftarrow, z[\quad \text{et} \quad V_y =]z, \rightarrow[$$

Z Le sens que nous venons de donner au mot « voisinage » semble différent de celui qu'il a dans le langage courant puisque pour nous un point x de **R** a de nombreux voisinages, et que l'un d'eux est l'espace **R** lui-même.

En fait nous avons plutôt enrichi une notion jusque-là peu précise, puisque nous pouvons désormais dire qu'un point y appartient à un voisinage V particulier de x; ce voisinage V précise en quelque sorte le degré de proximité de x et de y.

Point d'accumulation d'un ensemble. — Si A est un sous-ensemble de **R**, un point x_0 de **R** est dit *point d'accumulation* de A si dans tout voisinage de x_0 il existe au moins un point de A autre que x_0.

Il existe alors dans tout voisinage de x_0 une infinité de points de A autres que x_0. Sinon, il existerait un intervalle ouvert $]a, b[$ contenant x_0 et ne contenant qu'un nombre fini de points (x_i) de A.

Il existerait donc aussi un intervalle $]a', b'[$ ne rencontrant A qu'en x_0 au plus (prendre pour a' le plus grand des x_i inférieurs à x_0 s'il en existe, ou sinon le point a; et procéder de façon analogue pour le choix de b'); et ceci est exclu par hypothèse.

Z Un point d'accumulation d'un ensemble n'appartient pas nécessairement à cet ensemble. Par exemple le point 0 est point d'accumulation de l'ensemble des $x_n = 1/n$ (n entier > 0), mais n'appartient pas à cet ensemble. De même les points 0 et 1 sont points d'accumulation de $]0, 1[$ sans appartenir à cet intervalle.

Proposition 1-4. — *Tout ensemble fermé contient ses points d'accumulation. Inversement, tout ensemble qui contient ses points d'accumulation est fermé.*

Soit A un ensemble fermé; si $x \in \complement A$, l'ouvert $\complement A$ est voisinage de x et ne contient aucun point de A. Donc x ne peut être point d'accumulation de A.

Inversement si A est tel qu'aucun point de $\complement A$ ne soit point d'accumulation de A, il existe pour tout $x \in \complement A$ un voisinage de x ne contenant aucun point de A, donc contenu dans $\complement A$; l'ensemble $\complement A$ est donc voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire qu'il est ouvert; autrement dit A est fermé.

POINT ISOLÉ. — Un point *isolé* d'un ensemble A est un point x de A qui n'est pas point d'accumulation de A. Autrement dit, c'est un point x de A qui possède un voisinage V tel que $A \cap V = \{x\}$.

EXEMPLE. — Posons $A = [0, 1] \cup \mathbf{N}$; les points isolés de A sont les entiers $n \geqslant 2$.

EXISTENCE DE LA BORNE SUPÉRIEURE ET DE LA BORNE INFÉRIEURE. — Nous avons défini au chapitre I ce qu'on appelle borne supérieure d'un sous-ensemble A d'un ensemble ordonné E. Cette borne supérieure n'existe pas toujours, même si A est une partie majorée de E.

Par exemple, si E est l'ensemble totalement ordonné des nombres rationnels $\geqslant 0$, le sous-ensemble A des éléments x de E tels que $x^2 < 2$ n'admet pas de borne supérieure dans E bien qu'il soit évidemment majoré.

Par contre la définition de **R** donnée au chapitre III entraîne que ceci ne peut se produire dans **R**. A cause de la grande importance de cette propriété, nous en répéterons ici l'énoncé :

PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DE **R**. — *Toute partie non-vide majorée* (resp. minorée) *de* **R** *a une borne supérieure* (resp. inférieure).

Soit A une partie non-vide et majorée de **R** et soit b sa borne supérieure. La demi-droite $]\leftarrow, b]$ contient A et c'est évidemment la plus petite des demi-droites fermées négatives contenant A.

Pour tout $x < b$, $[x, b]$ rencontre A; donc, ou bien $b \in A$, ou bien b est point d'accumulation de A.

En particulier, si A est fermé, il contient sa borne supérieure b; ce point est alors le plus grand élément de A.

On a évidemment des propriétés analogues pour la borne inférieure.

REMARQUE. — Lorsqu'un ensemble A n'est pas minoré (resp. majoré) on dit parfois que $-\infty$ (resp. $+\infty$) est sa borne inférieure (resp. supérieure). On donnera plus tard à ce langage une justification précise.

ENSEMBLES BORNÉS. — On dit qu'une partie non-vide A de **R** est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée, autrement dit si A est contenu dans un intervalle fermé $[a, b]$.

D'après la propriété fondamentale de **R**, pour que A soit borné, il faut et il suffit qu'il ait une borne supérieure et une borne inférieure ; si a_0 et b_0 sont ces bornes, l'intervalle fermé $[a_0, b_0]$ est le plus petit des intervalles fermés contenant A.

Si A est borné et fermé, a_0 et b_0 appartiennent à A et sont respectivement le plus petit et le plus grand élément de A.

DIAMÈTRE. — Pour tout $A \subset \mathbf{R}$, on appelle *diamètre* de A la borne supérieure $\delta(A)$ (finie ou $+\infty$) des distances entre deux points de A.

Si $\delta(A)$ est finie, pour tout $x \in A$, l'ensemble A est majoré et minoré respectivement par $(x+\delta(a))$ et $(x-\delta(A))$ donc est borné. Inversement si A est borné, et admet pour bornes respectivement a et b ($a \leqslant b$), le diamètre de A est fini et vaut $(b-a)$.

2. — *Limite d'une suite. Critère de convergence de Cauchy*

Soit (a_i) ($i = 1, 2, ..., n, ...$) une suite infinie de points de **R**. On dit que cette suite converge vers l ou encore que l est limite de cette suite si pour tout voisinage V de l on a : $a_i \in V$ sauf au plus pour un nombre fini de valeurs de i (on peut évidemment ne prendre pour voisinages V que des intervalles ouverts contenant l).

Cette limite l est unique; car soient l_1 et l_2 deux points distincts de **R**, et V_1, V_2 deux voisinages disjoints de l_1 et l_2; si pour tout i, sauf au plus un nombre fini, on a $a_i \in V_1$, on ne peut avoir $a_i \in V_2$ que pour un nombre fini des a_i; donc si l_1 est limite de la suite, l_2 ne l'est pas.

THÉORÈME 2-*1*. — *Toute suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) a une limite.*

En effet, supposons par exemple que la suite donnée (a_i) soit croissante, et soit A l'ensemble des points a_i. Cet ensemble est non-vide et majoré, donc a une borne supérieure l. Or tout intervalle ouvert V contenant l contient au moins un point a_{i_0}, donc aussi tous les a_i d'indice $i > i_0$. Donc l est limite de la suite.

Critère de convergence de Cauchy. — Nous n'avons jusqu'ici utilisé que la structure d'ordre de **R**; nous allons pour la première fois utiliser sa structure de groupe.

Dire que la suite (a_i) converge vers l revient à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que

$$(i \geqslant n) \Longrightarrow (|a_i - l| \leqslant \varepsilon)$$

Il résulte de là que

$$(i \text{ et } j \geqslant n) \Longrightarrow (|a_i - a_j| \leqslant 2\varepsilon)$$

Cette inégalité a ceci de remarquable qu'elle ne fait pas intervenir l; nous allons voir que, inversement, toute suite possédant cette propriété est convergente. De façon précise :

Définition 2-2. — ON DIT QUE LA SUITE (a_i) $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ EST UNE *SUITE DE CAUCHY* SI $|a_i - a_j|$ TEND VERS 0 QUAND i ET j TENDENT VERS $+\infty$, AUTREMENT DIT, SI POUR TOUT $\varepsilon > 0$, IL EXISTE UN ENTIER n TEL QUE :

$$(i \text{ et } j \geqslant n) \Longrightarrow (|a_i - a_j| \leqslant \varepsilon)$$

Il revient au même de dire que si l'on désigne par A_n l'ensemble des points a_i d'indice $i \geqslant n$, et si l'on pose

$$\delta(\mathrm{A}_n) = \sup_{x,\, y \in \mathrm{A}_n} |x - y|$$

la suite décroissante des $\delta(\mathrm{A}_n)$ a pour limite 0.

THÉORÈME 2-3 (CRITÈRE DE CAUCHY). — *Toute suite de Cauchy de points de* **R** *est convergente.*

DÉMONSTRATION. — Nous savons déjà que toute suite convergente de points de **R** est une suite de Cauchy; c'est la réciproque que nous voulons établir.

Soit (a_i) une suite de Cauchy. Avec les notations ci-dessus, la suite $\delta(\mathrm{A}_n)$ tend vers 0. Or soient α_n et β_n $(\alpha_n \leqslant \beta_n)$ les bornes inférieure et supérieure de A_n. Comme la suite (A_n) est décroissante (au sens de l'inclusion), la suite des α_n est croissante et la suite des β_n est décroissante.

La suite croissante des α_n est majorée par β_1; elle a donc une limite α; de même les β_n ont une limite β.

Comme α et β appartiennent à tout intervalle $[\alpha_n, \beta_n]$, on a

$$|\beta - \alpha| \leqslant |\beta_n - \alpha_n|$$

donc $$\beta - \alpha = 0.$$

Posons $$l = \alpha = \beta.$$

Pour tout n, on a :

$$l \in [\alpha_n, \beta_n] \text{ et } a_n \in \mathrm{A}_n \subset [\alpha_n, \beta_n],$$

donc $$|l - a_n| \leqslant \sup.\, |l - \alpha_n| \text{ et } |l - \beta_n|.$$

Donc $(l - a_n) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$. La suite (a_n) converge donc bien vers l.

Nous utiliserons souvent le critère de Cauchy pour démontrer qu'une suite est convergente. Et nous l'étendrons à des espaces plus généraux que la droite réelle.

3. — *Compacité des intervalles fermés bornés*

Une des propriétés les plus importantes des intervalles fermés bornés se traduit par le théorème de Heine-Borel-Lebesgue qui permet de ramener l'étude des recouvrements ouverts d'un tel intervalle à celle des sous-recouvrements finis. De ce théorème résulte immédiatement une autre propriété connue sous le nom de théorème de Bolzano-Weierstrass.

Définition 3-*1*. — ON APPELLE *RECOUVREMENT OUVERT* D'UN ENSEMBLE A DE LA DROITE TOUT RECOUVREMENT DE A PAR DES ENSEMBLES OUVERTS DE **R**.

THÉORÈME 3-*2* (DE HEINE-BOREL-LEBESGUE). — *De tout recouvrement ouvert d'un intervalle fermé borné* $[a, b]$ *on peut extraire un sous-recouvrement ouvert fini.*

Plus explicitement, cela veut dire que pour toute famille $(\omega_i)_{i \in I}$ d'ouverts de **R** telle que

$$[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} \omega_i,$$

il existe une partie finie $J \subset I$ telle que

$$[a, b] \subset \bigcup_{i \in J} \omega_i.$$

DÉMONSTRATION. — Soit $(\omega_i)_{i \in I}$ la famille d'ouverts qui recouvre $[a, b]$ (où $a < b$, car le théorème est évident si $a = b$).

Désignons par A l'ensemble des points x de $[a, b]$ tels que l'intervalle $[a, x]$ soit recouvert par un nombre fini d'ouverts ω_i; démontrer le théorème revient à montrer que $b \in A$. Or A n'est pas vide puisqu'il contient a, et il est majoré par b. Il possède donc une borne supérieure m appartenant à $[a, b]$.

Il existe un $i_0 \in I$ tel que $m \in \omega_{i_0}$; or ω_{i_0} est un voisinage de m et il existe dans ce voisinage, à gauche de m, des points x de A tels que $[x, m] \subset \omega_{i_0}$; pour un tel x, $[a, x]$ possède un recouvrement fini par des ω_i; donc $[a, m] = [a, x] \cup [x, m]$ possède aussi un tel recouvrement. Or toute sous-famille finie des ω_i qui recouvre $[a, m]$ recouvre aussi un intervalle $[a, m']$, où $m' > m$. Ceci n'est compatible avec le fait que $m =$ borne supérieure de A, que si $m = b$.

Z Il est essentiel de remarquer dès maintenant que l'énoncé du théorème 3-*2* ne peut pas s'étendre à des intervalles non bornés, ou à des intervalles bornés mais non fermés. Par exemple, la suite des ouverts $]1/n, 2[$ (où $n \geqslant 2$) recouvre l'intervalle semi-ouvert $]0, 1]$, mais aucune sous-suite finie de cette suite n'a la même propriété.

THÉORÈME 3-*3* (DE BOLZANO-WEIERSTRASS). — *Pour tout intervalle fermé borné* $[a, b]$ *tout sous-ensemble infini* X *de* $[a, b]$ *a un point d'accumulation sur* $[a, b]$.

ENONCÉ ÉQUIVALENT. — *Tout sous-ensemble* X *de* $[a, b]$ *qui n'a aucun point d'accumulation sur* $[a, b]$ *est fini.*

DÉMONSTRATION. — Si aucun point x de $[a, b]$ n'est point d'accumulation de X, tout x possède un voisinage ouvert V_x contenant au plus un point de X, à savoir x lui-même. Ces V_x constituent un recouvrement ouvert de

$[a, b]$; d'après le théorème précédent, il existe un nombre fini de ces V_x, à savoir V_{x_i} $(i = 1, 2, ..., n)$ qui recouvrent $[a, b]$. Donc X contient au plus les n points x_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

Z Ici encore notons que l'énoncé du théorème 3-*3* ne s'étend, ni aux intervalles bornés non fermés, ni aux intervalles non bornés. Par exemple la suite infinie des points $1/n$ de l'intervalle semi-ouvert $]0, 1]$ n'a aucun point d'accumulation sur $]0, 1]$; en effet son seul point d'accumulation sur **R** est le point 0, qui n'appartient pas à $]0, 1]$.

Nous n'irons pas plus loin pour l'instant dans l'étude de la topologie de la droite. En effet de nombreuses propriétés topologiques de la droite sont valables pour des espaces bien plus généraux que la droite, et dont l'introduction dans l'analyse, bien loin d'être artificielle, est devenue indispensable pour la démonstration et la découverte de nombreuses propriétés.

Nous nous contenterons également de donner quelques définitions relatives à la topologie des espaces euclidiens et nous aborderons ensuite l'étude des espaces topologiques généraux. Il sera bon, lorsqu'on abordera cette étude, d'avoir toujours présents à l'esprit les cas particuliers plus concrets que constituent la droite réelle **R**, les espaces $\mathbf{R}^n$ et leurs sous-ensembles. Par la suite, les espaces métriques constitueront un autre matériel assez intuitif où l'on pourra puiser exemples et contre-exemples.

4. — Topologie de l'espace $\mathbf{R}^n$

Rappelons que l'espace $\mathbf{R}^n$ est le produit de n espaces identiques à **R**, donc l'ensemble des suites ordonnées $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de n nombres réels ; mais jusqu'ici nous n'avions introduit sur cet ensemble produit qu'une structure algébrique (d'espace vectoriel). Nous allons maintenant y mettre une structure topologique.

Définition 4-*1*. — SOIT ω_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ UN OUVERT DE **R** QUI SOIT, OU BIEN UN INTERVALLE OUVERT $]a_i, b_i[$, OU BIEN L'ENSEMBLE VIDE $\emptyset$. DANS $\mathbf{R}^n$, ON APPELLE *PAVÉ OUVERT* DE BASES ω_i LE SOUS-ENSEMBLE $\omega_1 \times \omega_2 \times \ldots \times \omega_n$ DE $\mathbf{R}^n$ (IL EST VIDE SI L'UNE DES BASES EST VIDE) ; LORSQU'IL N'EST PAS VIDE, SON CENTRE EST LE POINT DE COORDONNÉES $x_i = (a_i + b_i)/2$.

L'intersection de deux pavés ouverts de bases (ω_i), (ω'_i) est le pavé ouvert de bases $(\omega_i \cap \omega'_i)$.

On définirait de façon analogue les *pavés fermés* en remplaçant les intervalles ω_i ouverts par des intervalles fermés.

Définition 4-2. — ON APPELLE ENSEMBLE OUVERT DE $\mathbf{R}^n$ TOUTE RÉUNION DE PAVÉS OUVERTS.

Ainsi, dire qu'une partie A de $\mathbf{R}^n$ est ouverte, équivaut à dire que pour tout $x \in$ A, il existe un pavé ouvert contenant x et contenu dans A (si cela est utile, on peut imposer à ce pavé d'avoir pour centre x).

EXEMPLES. — Tout pavé ouvert de $\mathbf{R}^n$ est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$. Par contre une droite de $\mathbf{R}^2$ n'est pas un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

Vérifions que les ensembles ouverts de $\mathbf{R}^n$ satisfont aux propriétés O_1, O_2, O_3 du § 1. (Dans O_3, remplacer $\mathbf{R}$ par $\mathbf{R}^n$). C'est immédiat pour O_1 et pour O_3 ; montrons-le pour O_2 :

Si A et A′ sont deux ouverts, on a :

$$A = \bigcup_{i \in I} p_i \quad \text{et} \quad A' = \bigcup_{j \in J} p'_j$$

où les p_i et p'_j sont des pavés ouverts.

Donc
$$A \cap A' = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (p_i \cap p'_j).$$

Or $p_i \cap p'_j$ est un pavé ouvert; donc $A \cap A'$ est ouvert.

Par récurrence ce résultat s'étend à toute intersection finie d'ouverts.

FERMÉS, VOISINAGES, POINTS D'ACCUMULATION, ETC. — Dans $\mathbf{R}^n$, on dit qu'un ensemble est *fermé* si son complémentaire est ouvert; on dit qu'un ensemble V est *voisinage* d'un point x s'il contient un ensemble ouvert contenant x; on dit qu'un point x est *point d'accumulation* d'un ensemble A si dans tout voisinage de x, il existe au moins un point de A autre que x.

Nous pourrions étudier ici en détail les conséquences de ces définitions, comme nous l'avons fait pour $\mathbf{R}$. Mais dès maintenant il est plus instructif de faire cette étude dans un cadre plus général. Toutefois il sera bon d'avoir toujours présents à l'esprit les cas particuliers plus concrets que constituent la droite réelle $\mathbf{R}$, les espaces $\mathbf{R}^n$ et leurs sous-ensembles.

II. — ESPACES TOPOLOGIQUES

Dans l'étude élémentaire de $\mathbf{R}$ et de $\mathbf{R}^n$ qu'on vient de faire, presque toutes les notions ont été définies à partir des ouverts, et la plupart des propriétés ont été obtenues en n'utilisant que les propriétés O_1, O_2, O_3 de ces ouverts. D'où l'idée de fonder la topologie sur la notion d'ensemble ouvert; on va tenter d'exprimer toutes les notions topologiques classiques, telles que limite et continuité, en termes d'ouverts, et de retrouver le plus possible des théorèmes classiques à partir de quelques hypothèses simples sur l'ensemble de ces ouverts.

5. — *Ensembles ouverts, ensembles fermés, voisinages*

Définition 5-*1*. — ON APPELLE *ESPACE TOPOLOGIQUE* TOUT COUPLE CONSTITUÉ PAR UN ENSEMBLE E ET UN ENSEMBLE $\mathcal{O}$ DE PARTIES DE E APPELÉES ENSEMBLES *OUVERTS* (OU EN ABRÉGÉ « OUVERTS ») ET SATISFAISANT AUX TROIS PROPRIÉTÉS SUIVANTES :

O_1 : TOUTE RÉUNION (FINIE OU NON) D'OUVERTS EST OUVERTE;

O_2 : TOUTE INTERSECTION FINIE D'OUVERTS EST OUVERTE;

O_3 : L'ENSEMBLE E ET L'ENSEMBLE VIDE $\emptyset$ SONT OUVERTS.

On dit encore que l'ensemble $\mathcal{O}$ de parties de E définit sur E une topologie.

Sur tout ensemble E on peut définir plusieurs topologies, sauf lorsque E contient au plus un point. L'une d'elles est la *topologie discrète*; c'est celle pour laquelle $\mathcal{O}$ est l'ensemble de toutes les parties de E. C'est la topologie sur E qui comporte le plus d'ouverts possible.

Une autre est la *topologie grossière* : c'est celle pour laquelle $\mathcal{O}$ ne contient que deux éléments : $\emptyset$ et E. C'est la topologie sur E qui comporte le moins d'ouverts possible.

Mais les topologies intéressantes ne sont en général, ni discrètes, ni grossières.

On remarquera que les propriétés O_1, O_2, O_3 sont celles que nous avions mises en évidence dans l'étude de la topologie de la droite. Il est remarquable qu'elles suffisent à obtenir des énoncés très riches. Nous n'aurons à les compléter que lorsque nous étudierons les espaces topologiques séparés et les espaces compacts.

EXEMPLE : TOPOLOGIE ASSOCIÉE À UN ENSEMBLE TOTALEMENT ORDONNÉ. — Soit E un ensemble totalement ordonné quelconque; on appellera *ouvert* de E toute réunion d'intervalles ouverts de E; autrement dit A est un ouvert de E si A est vide ou si, pour tout $x \in$ A, il existe un intervalle ouvert contenant x et contenu dans A.

Cette définition ne fait évidemment que reprendre le procédé utilisé au paragraphe 1 dans le cas de **R**.

On vérifie aisément que les propriétés O_1, O_2, O_3 sont satisfaites.

La topologie ainsi définie sur E s'appelle la topologie de l'ordre.

CAS PARTICULIER. — Soit $\overline{\mathbf{R}}$ l'ensemble totalement ordonné défini comme suit :

Les points de $\overline{\mathbf{R}}$ sont les points de **R** et deux points supplémentaires notés $-\infty$ et $+\infty$; dans $\overline{\mathbf{R}}$ on dira que $x \leqslant y$ si, ou bien x et $y \in \mathbf{R}$ avec $(y-x)$ positif, ou bien $x = -\infty$, ou bien $y = +\infty$.

On vérifiera aisément que cette relation définit bien un ordre total sur $\overline{\mathbf{R}}$; $-\infty$ est son plus petit élément, et $+\infty$ est son plus grand élément.

L'ensemble $\overline{\mathbf{R}}$ muni de cet ordre et de la topologie associée s'appelle la *droite achevée.*

Définition 5-2. — ON DIT QU'UN SOUS-ENSEMBLE A DE E EST *FERMÉ* LORSQUE SON COMPLÉMENTAIRE $\complement_E A$ EST OUVERT.

Comme dans le cas de la droite, il résulte immédiatement des énoncés O_1, O_2, O_3 trois énoncés F_1, F_2, F_3 équivalents aux précédents par dualité et concernant les fermés de E :

F_1 : Toute intersection (finie ou non) de fermés est fermée;

F_2 : Toute réunion *finie* de fermés est fermée;

F_3 : L'ensemble vide et l'espace E sont fermés.

Par exemple, dans la topologie discrète sur E, tout sous-ensemble de E est à la fois ouvert et fermé; dans la topologie grossière sur E, les seuls ensembles fermés sont $\emptyset$ et E; si E est un ensemble totalement ordonné, tout intervalle fermé de E est un ensemble fermé de E pour la topologie de l'ordre.

Voisinages. — **Définition 5-3.** — ON APPELLE *VOISINAGE* D'UN POINT x DE E TOUT SOUS-ENSEMBLE DE E CONTENANT UN OUVERT CONTENANT x.

ON DÉSIGNE EN GÉNÉRAL PAR $\mathscr{V}(x)$ L'ENSEMBLE DES VOISINAGES V DE x.

ON APPELLE *VOISINAGE D'UNE PARTIE* A DE E TOUT SOUS-ENSEMBLE DE E CONTENANT UN OUVERT CONTENANT A.

Caractérisation des ouverts. — Il résulte de la définition précédente qu'un ensemble ouvert est voisinage de chacun de ses points. *Inversement,* si un ensemble A est voisinage de chacun de ses points, il est ouvert. En effet, pour tout $x \in A$, il existe un ouvert ω_x contenant x et contenu dans A. On a donc

$$A = \bigcup_{x \in A} \omega_x .$$

C'est une réunion d'ouverts, donc un ouvert.

CONSÉQUENCE. — Il résulte de là que les ouverts d'un espace sont connus dès que sont connus pour tout x les voisinages de x. Autrement dit, deux topologies sur un même ensemble, qui admettent les mêmes voisinages, sont identiques.

Voici quelques propriétés essentielles des voisinages que l'on prend parfois comme point de départ pour la définition d'un espace topologique.

V_1 : Tout voisinage de x contient x, et tout x a au moins un voisinage ;

V_2 : Tout ensemble contenant un voisinage de x est un voisinage de x;

V_3 : L'intersection de deux voisinages de x est un voisinage de x;

V_4 : Si V est un voisinage de x, il existe un sous-voisinage W de x (c'est-à-dire que $W \subset V$) tel que V soit un voisinage de chaque point de W.

Les deux premières propriétés sont immédiates. La troisième résulte de ce que l'intersection de deux ouverts est un ouvert.

La quatrième est plus cachée; elle exprime l'idée vague suivante : Tout point assez voisin d'un point assez voisin de x est voisin de x. Par hypothèse il existe un ouvert ω tel que $x \in \omega$ et $\omega \subset V$. Or ω est voisinage de chacun de ses points et *a fortiori* V est voisinage de chaque point de ω. Il suffit donc de prendre $W = \omega$.

Bases de voisinages d'un point. — Pour connaître $\mathscr{V}(x)$, il suffit de connaître suffisamment d'éléments de $\mathscr{V}(x)$.

Définition 5-*4*. — ON DIT QU'UNE PARTIE $\mathscr{B}$ DE $\mathscr{V}(x)$ CONSTITUE UNE *BASE* DE $\mathscr{V}(x)$ SI TOUT $V \in \mathscr{V}(x)$ CONTIENT UN ÉLÉMENT $W \in \mathscr{B}$.

Connaissant $\mathscr{B}$, on obtient les éléments V de $\mathscr{V}(x)$ comme sur-ensembles quelconques des éléments W de $\mathscr{B}$.

EXEMPLES. — 1° Si E est un espace quelconque, pour tout $x \in E$, les ouverts contenant x constituent une base de $\mathscr{V}(x)$.

2° Si E est la droite réelle $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{R}^n$), tout point x de E possède une base de voisinages constituée par les intervalles ouverts (resp. les pavés ouverts) de centre x et de demi-longueur $1/n$ (n entier > 0). Tout point x de E possède donc une base dénombrable de voisinages.

Bases d'ouverts d'un espace topologique. — **Définition 5-*5*.** — ON APPELLE *BASE D'OUVERTS* D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE E TOUTE FAMILLE (ω_i) D'OUVERTS DE E TELLE QUE SOIENT VÉRIFIÉES LES DEUX PROPRIÉTÉS ÉQUIVALENTES SUIVANTES :

1) TOUT $x \in E$ A UNE BASE DE VOISINAGES CONSTITUÉE PAR UNE SOUS-FAMILLE DES ω_i ;

2) TOUT OUVERT DE E EST RÉUNION D'UNE SOUS-FAMILLE DES ω_i .

L'équivalence de ces deux propriétés est immédiate à partir des définitions.

EXEMPLE 5-*6*. — La droite réelle $\mathbf{R}$ admet une base dénombrable d'ouverts constituée par les intervalles ouverts d'extrémités rationnelles.

En effet tout point de $\mathbf{R}$ a une base de voisinages constituée par de tels intervalles.

6. — Fermeture, intérieur, frontière

Point adhérent, point d'accumulation, point isolé.

Définition 6-*1*. — SOIT A UNE PARTIE DE E ET SOIT $x \in E$.

ON DIT QUE x EST *ADHÉRENT* À A SI TOUT VOISINAGE DE x CONTIENT UN POINT DE A.

ON DIT QUE x EST *POINT D'ACCUMULATION* DE A SI TOUT VOISINAGE DE x CONTIENT UN POINT DE A AUTRE QUE x.

ON DIT QUE x EST UN *POINT ISOLÉ* DE A S'IL APPARTIENT À A, MAIS N'EN EST PAS UN POINT D'ACCUMULATION, AUTREMENT DIT S'IL EXISTE UN VOISINAGE DE x QUI NE CONTIENT AUCUN AUTRE POINT DE A QUE x.

Ainsi, dire que x est adhérent à A équivaut à dire que, ou bien x est un point d'accumulation de A, ou bien x est un point isolé de A.

On appellera *adhérence* de A l'ensemble des points de E qui sont adhérents à A.

Par exemple, dans **R**, l'adhérence de **Q** est **R** lui-même; l'adhérence d'un intervalle $]a, b[$ d'extrémités distinctes est $[a, b]$; l'adhérence de l'ensemble des points $1/n$ ($n = 1, 2, ...$) est cet ensemble augmenté du point 0.

Fermeture d'un ensemble. — Pour tout $A \subset E$ il existe des fermés contenant A (par exemple E lui-même). D'après la propriété F_1, leur intersection est un fermé contenant A et c'est le plus petit d'entre eux. D'où la définition :

Définition 6-2. — ON APPELLE *FERMETURE* DE A, ET ON NOTE $\overline{A}$, LE PLUS PETIT ENSEMBLE FERMÉ DE E CONTENANT A.

PROPOSITION **6-3**. — *Pour tout ensemble* A, *l'adhérence et la fermeture de* A *sont identiques.*

En effet si A est une partie d'un espace E et si x désigne un point quelconque de E, chacune des propriétés :

$$(x \notin \overline{A}) \qquad \text{et} \qquad (x \text{ non adhérent à } A)$$

se traduit par l'existence d'un voisinage ouvert ω de x qui ne rencontre pas A.

COROLLAIRE. — 1° *La relation* $A = \overline{A}$ *caractérise les ensembles fermés ;* 2° *Pour que* A *soit fermé il faut et il suffit qu'il contienne ses points d'accumulation.*

DÉMONSTRATION. — 1° Si A est fermé, il est évidemment égal à sa fermeture. Inversement, de $A = \overline{A}$ résulte que A est fermé puisque toute fermeture est par définition un ensemble fermé.

Remarquons ici que pour tout A, on a $(\overline{\overline{A}}) = \overline{A}$.

2° Soit A′ l'ensemble des points d'accumulation de A. D'après la définition de l'adhérence, on a $\overline{A} = A \cup A'$. Donc dire que $A = \overline{A}$ équivaut à dire que $A = A \cup A'$ ou encore $A' \subset A$.

Intérieur d'un ensemble. — La notion « duale » (au sens des formules 12-2, chap. I) de celle de *fermeture* est celle d'intérieur :

Définition 6-4. — ON APPELLE *INTÉRIEUR* D'UN SOUS-ENSEMBLE A DE E, LA RÉUNION, ÉVENTUELLEMENT VIDE, DE TOUS LES OUVERTS CONTENUS DANS A. C'EST DONC LE PLUS GRAND DES OUVERTS CONTENUS DANS A ; ON LE NOTE $\mathring{A}$.

Il est immédiat que la relation $A = \mathring{A}$ caractérise les ouverts.

Relation entre les opérations topologiques $\mathring{A}$, $\overline{A}$ et les opérations élémentaires. — 1° **Dualité entre fermeture et intérieur :**

1) $$\complement \mathring{A} = \overline{\complement A}.$$

En effet par définition $$\mathring{A} = \bigcup_{\iota \in I} \omega_\iota ,$$

où $(\omega_\iota)_{\iota \in I}$ désigne la famille de tous les ouverts contenus dans A;

donc $$\complement \mathring{A} = \bigcap_{\iota \in I} \complement \omega_\iota = \bigcap_{\iota \in I} \varphi_\iota ,$$

où $(\varphi_\iota)_{\iota \in I}$ désigne la famille des fermés contenant $\complement$ A; c'est donc sa fermeture.

2) $$\complement \overline{A} = \overset{\circ}{\complement} A .$$

Cette formule se déduit de la précédente en y remplaçant A par $\complement$ A.

2° **Propriétés de la fermeture :**

1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$; 2) $A \subset \overline{A}$;

3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$; 4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Les deux premières relations sont immédiates; la troisième résulte de ce que la fermeture de tout fermé lui est identique.

Pour démontrer la quatrième, notons d'abord que

$$(X \subset Y) \Longrightarrow (X \subset \overline{Y}) \Longrightarrow (\overline{X} \subset \overline{Y});$$

on en déduit que $$\overline{A} \text{ et } \overline{B} \subset \overline{A \cup B},$$

d'où $$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B};$$

inversement, $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé contenant A et B, donc aussi $A \cup B$,

d'où $$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Cette relation importante s'étend évidemment à toute réunion finie. Par contre elle ne s'étend pas aux réunions infinies à cause du fait qu'une réunion quelconque de fermés n'est pas toujours un fermé.

On n'a pas non plus de relation analogue pour l'intersection, même finie. Par exemple, si E = la droite **R** et si A et B désignent respectivement l'ensemble des rationnels et l'ensemble des irrationnels, on a $\overline{A} \cap \overline{B} = \mathbf{R}$ tandis que $\overline{A \cap B} = \emptyset$. On a seulement l'inclusion $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

De même, pour toute famille (A_i) de parties de E, on a les inclusions :

$$\bigcup \overline{A_i} \subset (\overline{\bigcup A_i}) \qquad \text{et} \qquad (\overline{\bigcap A_i}) \subset \bigcap \overline{A_i}$$

3° **Propriétés de l'intérieur.** — Elles sont duales des propriétés de la fermeture :

$$1) \quad \mathring{E} = E\,; \qquad 2) \quad \mathring{A} \subset A\,;$$

$$3) \quad \mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}\,; \qquad 4) \quad (A \overset{\circ}{\cap} B) = \mathring{A} \cap \mathring{B}\,.$$

Frontière d'un ensemble. — **Définition 6-5.** — LA FRONTIÈRE A^* D'UN SOUS-ENSEMBLE A DE E EST L'ENSEMBLE DES POINTS x DONT TOUT VOISINAGE V CONTIENT AU MOINS UN POINT DE A ET UN POINT DE $\complement$ A.

On a donc $$A^* = \overline{A} \cap \overline{\complement A}\,.$$

Sur cette formule on voit que la frontière de tout ensemble est fermée et que deux ensembles complémentaires ont même frontière.

PROPOSITION **6-6.** — *Pour toute partie* A *de* E, *on a* $A^* = \overline{A} \dot{-} \mathring{A}$.

En effet on a les relations

$$A^* = \overline{A} \cap \overline{\complement A} \text{ et } \overline{\complement A} = \complement \mathring{A}\,,\ \text{d'où } A^* = \overline{A} \cap \complement \mathring{A}\,,$$

ce qui n'est autre que la relation cherchée.

COROLLAIRE. — *Pour toute partie fermée* A *de* E, *on a les équivalences :*

$$(A = A^*) \Longleftrightarrow (\mathring{A} = \emptyset) \Longleftrightarrow (\overline{\complement A} = E)\,.$$

EXEMPLES. — Dans **R**, la frontière de **Q** est **R** ; par contre la frontière de **R** lui-même est vide ; et la frontière de] 0, 1 [ou de [0, 1] est l'ensemble $\{0, 1\}$.

Ensembles partout denses, denses et non-denses. — Sur la droite réelle, il y a des rationnels dans tout ouvert non-vide.

Par contre tout ouvert non-vide de **R** contient un sous-ouvert non-vide qui ne contient aucun entier. Pour préciser les notions vagues suggérées par

ces différences entre les répartitions de **Q** et de **Z** sur **R**, on introduit les définitions suivantes.

Définition 6-7. — Soit A un sous-ensemble d'un espace E.

On dit que A est *partout dense* sur E, *dense* sur E, ou *non-dense* sur E suivant que :

$\overline{A} = E$; $\overline{A}$ a son intérieur non-vide; $\overline{A}$ a son intérieur vide.

Par exemple, dans **R**, l'ensemble **Q** est partout dense; l'ensemble **Q** $\cap$ [0, 1] est dense; l'ensemble **Z** est non-dense, de même que l'ensemble des nombres $1/n$ (où $n = 1, 2, \ldots$).

Notons que certains mathématiciens utilisent l'expression « dense » au lieu de « partout dense ».

Propriétés immédiates (*à partir du corollaire de la proposition* 6-6). — 1° Si A est partout dense sur E et si $A \subset B \subset E$, B est aussi partout dense sur E.

2° (A partout dense) $\Longleftrightarrow$ (Tout ouvert non-vide de E rencontre A).

3° (A non-dense) $\Longleftrightarrow$ ($\overline{A}$ non-dense) $\Longleftrightarrow$ ($\complement \overline{A}$ partout dense) $\Longleftrightarrow$ (Tout ouvert non-vide de E contient un sous-ouvert non-vide ne rencontrant pas A.)

4° Si A et B sont non-denses sur E, l'ensemble $A \cup B$ l'est aussi.

Cette dernière propriété s'étend aux réunions finies quelconques, mais non aux réunions infinies (prendre le cas de **Q** sur **R**).

Z Si A est non-dense, $\complement A$ est partout dense, mais il peut arriver que A et $\complement A$ soient tous deux partout denses : c'est le cas pour le sous-ensemble **Q** de **R** et pour son complémentaire.

Le même exemple montre que A et B peuvent être partout denses sur E, bien que $A \cap B$ soit vide.

Proposition 6-8. — *Tout espace* E *qui admet une base dénombrable d'ouverts est* séparable *(en ce sens que* E *contient un sous-ensemble dénombrable partout dense).*

En effet, soit (ω_n) la base donnée ; et pour tout n tel que $\omega_n \neq \phi$, soit x_n un point de ω_n. L'ensemble X des x_n est partout dense dans E ; car si ω est un ouvert non-vide quelconque de E, ω est réunion de certains ω_n non-vides, donc contient les x_n correspondants ; autrement dit $(X \cap \omega)$ n'est pas vide.

7. — *Fonctions continues. Homéomorphies.*

Pour pouvoir parler de la continuité d'une application f d'un ensemble X dans un ensemble Y, il faut que l'on ait défini sur X et Y une notion de points voisins, autrement dit que X et Y soient des espaces topologiques.

L'analyse des définitions classiques de la continuité d'une fonction numérique d'une variable réelle a conduit à la définition suivante :

Continuité en un point. — **Définition 7-1.** — ON DIT QUE L'APPLICATION f DE L'ESPACE TOPOLOGIQUE X DANS L'ESPACE TOPOLOGIQUE Y EST *CONTINUE* AU POINT x_0 DE X SI, POUR TOUT VOISINAGE V DE $f(x_0)$, IL EXISTE UN VOISINAGE v DE x_0 DONT L'IMAGE PAR f SOIT DANS V, C'EST-À-DIRE TELLE QUE $f(v) \subset$ V.

En symboles logiques cette définition s'écrit :

$$(f \text{ continue en } x_0) \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \Big(\forall \mathrm{V}, \mathrm{V} \in \mathscr{V}(f(x_0))\Big)\ (\exists\, v,\ v \in \mathscr{V}(x_0)) : (f(v) \subset \mathrm{V}).$$

On obtiendrait évidemment une définition équivalente en imposant à V et v d'appartenir à des bases données de voisinages de $f(x_0)$ et x_0 respectivement.

Voici une autre forme commode de la continuité de f en x_0 : Pour tout voisinage V de $f(x_0)$, $f^{-1}(\mathrm{V})$ est un voisinage de x_0. En effet, soit V un voisinage de $f(x_0)$; si v est un voisinage de x_0 tel que $f(v) \subset \mathrm{V}$, on a $v \subset f^{-1}(\mathrm{V})$, donc $f^{-1}(\mathrm{V})$ qui contient un voisinage de x_0 est aussi un voisinage de x_0; inversement si $f^{-1}(\mathrm{V})$ est un voisinage de x_0, on pose $v = f^{-1}(\mathrm{V})$ et l'on a bien $f(v) \subset \mathrm{V}$. Ici encore on peut imposer à V d'appartenir à une base donnée de voisinages de $f(x_0)$.

EXEMPLES. — 1° Si f est une application constante de X dans Y on a $f^{-1}(\mathrm{V}) = \mathrm{X}$ pour tout voisinage V de $f(x_0)$; donc toute application constante de X dans Y est continue en tout point de X.

2° L'application identique $x \longrightarrow x$ de X dans X est continue en tout point de X.

Continuité dans tout l'espace. — **Définition 7-2.** — ON DIT QUE L'APPLICATION f DE X DANS Y EST *CONTINUE SUR* X (OU DANS X) SI ELLE EST CONTINUE EN TOUT POINT DE X.

THÉORÈME 7-3. — *Dire que f est continue sur* X *équivaut à dire que, pour tout* ouvert B *de* Y, $f^{-1}(\mathrm{B})$ *est un* ouvert *de* X.

En effet, supposons f continue sur X; si B est ouvert dans Y, comme B est voisinage de chacun de ses points, son image réciproque est voisinage de chacun de ses points, donc est un ouvert.

Inversement, supposons que $f^{-1}(B)$ soit ouvert pour tout ouvert B de Y ; alors pour tout x_0 et tout voisinage V de $f(x_0)$ l'ensemble $f^{-1}(\overset{\circ}{V})$ est un ouvert contenant x_0, donc *a fortiori* $f^{-1}(V)$ est voisinage de x_0. Donc f est continue en tout point x_0 de X.

THÉORÈME 7-4. — *Dire que* f *est continue sur* X *équivaut à dire que, pour tout* fermé B de Y, $f^{-1}(B)$ *est un* fermé *de* X.

Ce théorème se déduit du précédent par application de la relation :

$$f^{-1}(\complement B) = \complement f^{-1}(B).$$

COROLLAIRE. — *Si* f *est une application continue de* X *dans* **R**, *l'ensemble des points* x *de* X *tels que* $f(x) = 0$ *est un fermé de* X.

On aurait des énoncés analogues pour les solutions des relations de la forme

$$f(x) \geqslant 0, \qquad f(x) \leqslant 0, \qquad f(x) > 0, \qquad f(x) < 0.$$

En particulier, si f est un polynôme, à coefficients réels, de n variables réelles, le corollaire montre que la variété algébrique réelle des solutions de $f(x) = 0$ est un fermé de $\mathbf{R}^n$; même résultat dans $\mathbf{C}^n$ pour les polynômes de n variables complexes.

Z Il est essentiel de noter que les deux caractérisations de la continuité de f énoncées dans les théorèmes 7-*3* et 7-*4*, utilisent les images *réciproques* et non pas les images directes par f.

En fait l'image d'un ouvert de X par une application continue n'est qu'exceptionnellement un ouvert de Y. Par exemple, dans l'application constante $x \longrightarrow 0$ de **R** dans **R** aucun ouvert non-vide de X n'a une image ouverte.

De même l'image d'un fermé de X par une application continue peut ne pas être un fermé de Y : par exemple l'application $x \longrightarrow 1/(x^2+1)$ de **R** dans **R** transforme le fermé **R** en $]0, 1]$ qui n'est pas fermé dans **R**.

Voici maintenant une caractérisation de la continuité de f en termes d'images directes :

THÉORÈME 7-5. — *Dire que l'application* f *de* X *dans* Y *est continue équivaut à dire que pour tout ensemble* $A \subset X$, *on a* $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

En effet, si f est continue, la relation $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ montre que $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, d'où $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Inversement, si cette relation est vérifiée pour tout $A \subset X$, montrons que l'ensemble $A = f^{-1}(B)$ est fermé pour tout fermé B de Y, ce qui démontrera la continuité de f :

On a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B} = B$, donc $\overline{A} \subset f^{-1}(B) = A$, d'où $\overline{A} = A$; autrement dit A est fermé.

Transitivité des applications continues. – Soient X, Y, Z trois espaces topologiques, f une application de X dans Y, g une application de Y dans Z, et $h = g \circ f$.

Soit $x_0 \in X$; posons $y_0 = f(x_0)$ et $z_0 = g(y_0) = g(f(x_0)) = h(x_0)$.

PROPOSITION 7-6. – *Si f est continue en x_0 et si g est continue en y_0, la composée $h = g \circ f$ est continue en x_0.*

En effet, soit V un voisinage quelconque de z_0. La continuité de g en y_0 entraîne que $g^{-1}(V)$ soit un voisinage de y_0; la continuité de f en x_0 entraîne donc que $f^{-1}(g^{-1}(V)) = h^{-1}(V)$ soit un voisinage de x_0.

En particulier si f est continue sur X et si g est continue sur Y, $h = g \circ f$ est continue sur X.

EXEMPLE. — L'application $u \longrightarrow |u|$ de **R** dans **R** est continue; donc pour toute application continue f de X dans **R**, l'application $|f|$ de X dans **R** définie par $x \longrightarrow |f(x)|$ est aussi continue.

Homéomorphies. – Il est naturel de dire que deux espaces topologiques X et Y sont isomorphes s'il existe une bijection f de X sur Y qui échange leurs ensembles ouverts, c'est-à-dire telle que pour tout ouvert A de X, $f(A)$ soit un ouvert de Y et que pour tout ouvert B de Y, $f^{-1}(B)$ soit un ouvert de X. On donne à un tel isomorphisme le nom d'*homéomorphie*.

Il est clair que l'inverse d'une homéomorphie en est une, et que le produit de deux homéomorphies en est une. En particulier, l'ensemble des homéomorphies d'un espace sur lui-même constitue un groupe.

COMMENTAIRES. — La notion d'homéomorphie est fondamentale en topologie puisqu'une homéomorphie n'est autre chose qu'un isomorphisme de structures topologiques; c'est la relation d'équivalence de base en topologie.

Lorsque deux espaces topologiques sont homéomorphes, toute propriété vraie pour l'un est vraie pour l'autre; on peut les considérer comme deux représentants d'un même être géométrique.

Lorsqu'un ensemble E est muni de diverses structures parmi lesquelles une structure topologique (les autres pouvant être des structures algébriques, métriques, etc.), on dit qu'une propriété de E est topologique si elle est vraie de tout espace topologique homéomorphe à E : par exemple le fait que **R** contient un sous-ensemble dénombrable partout dense est topologique. Avec un peu d'habitude on reconnaît en général facilement si une propriété est topologique ou non; elle l'est toujours, en tout cas, lorsqu'elle s'énonce en

termes d'ensembles ouverts et des notions dérivées telles que : fermés, voisinages, point d'accumulation, partout dense, etc.

Voici, sans souci de la précision et sans démonstration, une série d'exemples destinés à faire comprendre le contenu intuitif de l'homéomorphie ; sur chacune des premières lignes on a figuré un ou plusieurs dessins et des lettres majuscules qui leur sont homéomorphes.

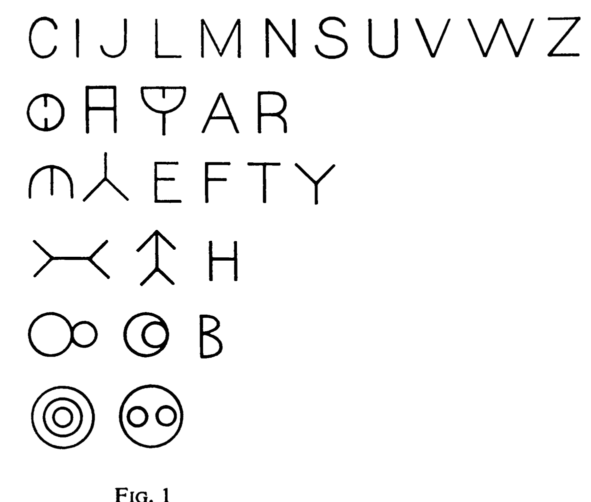


FIG. 1

La surface latérale d'un tronc de cône est homéomorphe à une couronne circulaire.

Un hémisphère est homéomorphe à un pavé fermé de $\mathbf{R}^2$.

On peut se faire une assez bonne idée de l'homéomorphie, lorsqu'il s'agit de surfaces de l'espace $\mathbf{R}^3$, en imaginant ces surfaces réalisées en caoutchouc; une homéomorphie est alors une déformation de ces surfaces par étirement et compression, sans déchirure, ni pliage, ni collage. Toutefois ce recours à l'intuition peut être trompeur et ne saurait en aucun cas remplacer un raisonnement correct.

EXEMPLE DE DÉMONSTRATION D'HOMÉOMORPHIE. — Soient X et Y deux ensembles totalement ordonnés isomorphes, et soit f une bijection de X sur Y qui soit une isomorphie pour la structure d'ordre (autrement dit f est une bijection croissante).

Alors f est une homéomorphie pour les topologies sur X et Y, associées à leur ordre.

En effet f échange les intervalles ouverts de X et Y, donc aussi leurs ouverts puisque ceux-ci sont définis en termes d'intervalles ouverts.

CAS PARTICULIER. — L'application $f : x \longrightarrow x/(1 + |x|)$ est une bijection croissante de $\mathbf{R}$ sur $]-1, 1[$; on la complète en une bijection croissante de $\overline{\mathbf{R}}$ sur $[-1, 1]$ en posant :

$$f(-\infty) = -1 \qquad \text{et} \qquad f(+\infty) = 1.$$

Donc $\overline{\mathbf{R}}$ et $[-1, 1]$ munis de la topologie de l'ordre sont homéomorphes.

Nous allons maintenant démontrer un critère général commode d'homéomorphie :

THÉORÈME 7-7. — *Pour qu'une bijection f d'un espace* X *sur un espace* Y *soit une homéomorphie, il faut et il suffit qu'elle soit bicontinue, c'est-à-dire que f et f^{-1} soient continues.*

En effet, dire que f et f^{-1} sont continues équivaut bien à dire que l'image réciproque de tout ouvert de Y est ouverte et que l'image directe de tout ouvert de X est ouverte.

EXEMPLE. — Les translations de $\mathbf{R}^n$ sont des homéomorphies de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^n$; plus généralement il en est de même des dilatations

$$x \longrightarrow \lambda x + a \quad (\lambda \neq 0).$$

Z L'étude hâtive de quelques cas particuliers pourrait laisser croire que toute bijection f continue d'un espace X sur un espace Y est aussi bicontinue. Nous verrons plus tard qu'il en est bien ainsi dans certains cas (voir l'étude des espaces compacts). Mais ce n'est pas un fait général. En voici des exemples :

EXEMPLES. — 1° Y est la droite réelle $\mathbf{R}$; X a pour éléments les éléments de $\mathbf{R}$, mais pour topologie la topologie discrète. L'application f de X sur Y est l'application identique $x \longrightarrow x$. Elle est évidemment continue, mais non bicontinue.

2° X et Y sont deux sous-ensembles de $\mathbf{R}$, munis de la topologie induite par celle de $\mathbf{R}$ (voir paragraphe 9); X est constitué de l'intervalle $[0, 1[$ et du point 2; Y est l'intervalle $[0, 1]$. Enfin f est définie par $f(x) = x$ si $x \in [0, 1[$, et $f(2) = 1$.

Il est immédiat que cette application est biunivoque et continue, mais que f^{-1} n'est pas continue au point 1.

L'étude de ces deux exemples suffit à montrer que le manque de continuité de f^{-1} résulte du fait que f, tout en étant biunivoque et continue, « rapproche » les points, et que, plus précisément, il peut exister dans X un ensemble A qui ne soit pas voisinage d'un point a, alors que $f(\mathrm{A})$ est voisinage de $f(a)$.

8. — Notion de limite

Limite d'une suite. — **Définition 8-*1*.** — SOIT (a_i) $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ UNE SUITE DE POINTS D'UN ESPACE E. ON DIT QUE CETTE SUITE *CONVERGE* VERS UN POINT a DE E, OU ENCORE QUE a EST *LIMITE* DE CETTE SUITE, SI POUR TOUT VOISINAGE V DE a IL EXISTE UN ENTIER i_0 TEL QUE POUR TOUT $i \geqslant i_0$, ON AIT $a_i \in \mathrm{V}$.

En abrégé

$$(\forall \mathrm{V}, \mathrm{V} \in \mathscr{V}(a))\ (\exists i_0, i_0 \in \mathbf{N})\ (\forall i, i \geqslant i_0) : (a_i \in \mathrm{V}).$$

Cette condition s'exprime encore ainsi : Pour tout voisinage V de a, on a $a_i \in V$ sauf au plus pour un nombre fini de valeurs de i.

Il est immédiat que si la suite (a_i) converge vers a, toute suite partielle infinie converge aussi vers a.

Si l'espace E est quelconque, une suite peut posséder plusieurs points limites; par exemple lorsque la topologie de E est grossière, tout point de E est limite de toute suite $(a_i)_{i \in I}$.

Mais on peut affirmer que la limite est unique lorsque E est un espace *séparé*, dans le sens suivant :

Définition 8-2. — ON DIT QU'UN ESPACE E EST *SÉPARÉ* LORSQUE DEUX POINTS DISTINCTS QUELCONQUES DE E POSSÈDENT DEUX VOISINAGES DISJOINTS.

Les espaces les plus utiles sont toujours séparés; par exemple la droite **R** est séparée (voir § 1, p. 4).

Dans un espace séparé, l'intersection des voisinages fermés d'un point a est réduite à ce point. En effet, pour tout $b \neq a$, il existe deux ouverts disjoints ω_a, ω_b contenant respectivement a et b, donc $\complement \omega_b$ est un voisinage fermé de a ne contenant pas b.

En particulier tout ensemble $\{a\}$ est fermé puisqu'il est l'intersection de ses voisinages fermés.

PROPOSITION **8-3**. — *Toute suite de points d'un espace séparé possède au plus un point limite.*

La démonstration est la répétition exacte de celle donnée pour **R**.

Valeurs d'adhérence d'une suite. — La suite de nombres réels $a_n = (-1)^n$ n'est pas convergente, toutefois les nombres 1 et -1 apparaissent comme limites en un sens large. L'analyse de cette notion conduit à la définition suivante :

Définition 8-4. — SOIT (a_i) $(i = 1, 2, \ldots)$ UNE SUITE DE POINTS D'UN ESPACE E. ON DIT QU'UN POINT a DE E EST UNE *VALEUR D'ADHÉRENCE* DE CETTE SUITE SI POUR TOUT VOISINAGE V DE a IL EXISTE DES INDICES i ARBITRAIREMENT GRANDS TELS QUE $a_i \in V$.

Si l'on désigne par A_n l'ensemble des points a_i d'indice $i \geqslant n$, on peut dire encore que a est valeur d'adhérence lorsque pour tout n, le point a appartient à l'adhérence de A_n.

L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(a_i)_{i \in I}$ est donc

$$A = \bigcap_1^\infty \overline{A}_n .$$

Cet ensemble est fermé; il peut être vide; par exemple dans **R** la suite ($a_n = n$) n'a aucune valeur d'adhérence.

Si tous les points a_i de la suite appartiennent à un sous-ensemble fermé F de E, on a $A \subset F$; en effet $A_n \subset F$, d'où $\overline{A}_n \subset F$, et $A \subset F$.

Dans un espace séparé, si une suite (a_i) converge vers a, ce point est la seule valeur d'adhérence de la suite. En effet, soit $b \neq a$, et soient V_b, V_a deux voisinages disjoints de ces deux points. Il existe un n tel que $A_n \subset V_a$; comme $A_n \cap V_b = \emptyset$, le point b n'est pas adhérent à la suite.

Z Par contre il est faux en général, même dans un espace séparé, que si une suite a une seule valeur d'adhérence, elle converge vers cette valeur. Par exemple dans **R**, la suite $(1/2, 2, 1/3, 3, \ldots, 1/n, n, \ldots)$ a pour seule valeur d'adhérence le point 0, bien qu'elle ne converge pas vers 0.

REMARQUE. — Pour avoir une idée plus précise de ce qu'est l'adhérence d'une suite (a_n), on vérifiera qu'elle est la réunion de deux ensembles : d'une part l'ensemble des points d'accumulation de l'ensemble X des a_n, d'autre part l'ensemble des points de *répétition* de la suite, c'est-à-dire les x tels que $x = a_n$ pour une infinité d'indices n.

Limite et valeur d'adhérence suivant une base de filtre. — L'Analyse classique ne définit pas la notion de limite que pour les suites : par exemple la fonction $x^2/(x^2+1)$ tend vers 1 lorsque x tend vers ∞; $(1/x^2 + 1/y^2)$ tend vers 0 lorsque x et y tendent vers ∞; $\sin x/x$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0 par valeurs $\neq 0$.

Nous allons voir que toutes les notions de limite qui interviennent dans ces exemples sont des cas particuliers d'une notion générale.

Définition 8-5. — SOIT E UN ENSEMBLE QUELCONQUE. ON APPELLE *BASE DE FILTRE* SUR E TOUT ENSEMBLE $\mathscr{B}$ DE PARTIES DE E TEL QUE :

1° POUR TOUS $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, IL EXISTE $B_3 \in \mathscr{B}$ TEL QUE $B_3 \subset B_1 \cap B_2$;

2° AUCUN ÉLÉMENT B DE $\mathscr{B}$ N'EST VIDE.

Il résulte de cette définition que l'intersection d'un nombre fini d'éléments de $\mathscr{B}$ n'est jamais vide.

EXEMPLES. — 1° $E = \mathbf{N}$, et les éléments de $\mathscr{B}$ sont les parties de E de la forme $\{n, n+1, \ldots\}$.

2° $E = \mathbf{N}^2$ et les éléments de $\mathscr{B}$ sont les parties B_n de E, où $B_n =$ l'ensemble des couples (p, q) tels que $p \geqslant n$ et $q \geqslant n$.

3° E $=$ **R** et les éléments de $\mathscr{B}$ sont les intervalles $[a, \longrightarrow[$ de **R**.

4° E est un espace topologique, et $\mathscr{B}$ est une base de voisinages d'un point a de E.

5° E est un espace topologique; on désigne par A une partie non-vide de E, et par a un point adhérent à A.

Les éléments de $\mathscr{B}$ sont les ensembles de la forme $A \cap V$, où V est un voisinage quelconque de a (on peut même imposer à V d'appartenir à une base de voisinages de a).

Définition 8-*6*. — SOIT f UNE APPLICATION D'UN ENSEMBLE X DANS UN ESPACE TOPOLOGIQUE Y ; SOIT $\mathscr{B}$ UNE BASE DE FILTRE SUR X, ET SOIT b UN POINT DE Y.

ON DIT QUE f CONVERGE VERS b (OU A POUR LIMITE b) SUIVANT $\mathscr{B}$ SI POUR TOUT VOISINAGE V DE b, IL EXISTE UN $B \in \mathscr{B}$ TEL QUE $f(B) \subset V$.

ON ÉCRIT ALORS $\lim_{\mathscr{B}} f = b$.

EN PARTICULIER, LORSQUE $X = Y$ ET QUE f EST L'APPLICATION IDENTIQUE DE X DANS X, ON DIT SIMPLEMENT QUE LA BASE DE FILTRE $\mathscr{B}$ CONVERGE VERS b.

EXEMPLES. — 1° Soit (a_n) une suite de points de Y; désignons par f l'application $n \longrightarrow a_n$ de **N** dans Y, et par $\mathscr{B}$ l'ensemble des parties de **N** dont le complémentaire est fini. La définition 8.*6* coïncide alors avec la définition 8.*1*.

2° Si X est un espace topologique et si $\mathscr{B}$ désigne l'ensemble des voisinages d'un point a de X, dire que $f(a)$ est la limite de f suivant $\mathscr{B}$ équivaut à dire que f est continue au point a.

Notons que l'on remplace parfois la notation $\lim_{\mathscr{B}} f$ par $\lim_{\mathscr{B}} f(x)$, en particulier lorsque $f(x)$ a une expression simple et que l'on ne dispose pas d'une notation classique pour f; c'est le cas pour les fonctions élémentaires $x \longrightarrow x^n$ et $x \longrightarrow |x|$.

PROPOSITION 8-*7*. — *Si* Y *est un espace séparé, f peut avoir au plus une limite suivant $\mathscr{B}$.*

En effet, supposons que b et b' soient limites de f suivant $\mathscr{B}$. Pour tous voisinages V, V′ de b, b', il existe $B, B' \in \mathscr{B}$ tels que

$$f(B) \subset V \text{ et } f(B') \subset V'.$$

Comme $B \cap B'$ n'est pas vide, il en est de même de $f(B) \cap f(B')$, donc *a fortiori* de $V \cap V'$. Comme Y est séparé, ceci n'est possible que si $b = b'$.

Définition 8-*8*. — SOIT f UNE APPLICATION DE X DANS UN ESPACE TOPOLOGIQUE Y, ET SOIT $\mathscr{B}$ UNE BASE DE FILTRE SUR X.

ON DIT QU'UN POINT b DE Y EST UNE VALEUR D'ADHÉRENCE DE f SUIVANT $\mathscr{B}$ SI, POUR TOUT $B \in \mathscr{B}$ ET POUR TOUT VOISINAGE V DE b, $f(B)$ RENCONTRE V.

Ceci équivaut à dire que, pour tout $B \in \mathscr{B}$, on a $b \in \overline{f(B)}$ ou encore que

$$b \in \bigcap_{B \in \mathscr{B}} \overline{f(B)}$$

L'ensemble de ces b (appelé *adhérence* de f suivant $\mathscr{B}$) est donc l'ensemble

$$\bigcap_{B \in \mathscr{B}} \overline{f(B)};$$

il est évidemment fermé ; on le notera $\bar{f}(\mathscr{B})$.

Comme dans le cas des suites, on vérifiera que si Y est séparé, et si f converge vers b suivant $\mathscr{B}$, b est la seule valeur d'adhérence de f suivant $\mathscr{B}$.

CAS PARTICULIER **8-*9*** : ***Limite et valeurs d'adhérence d'une fonction en un point.*** – On suppose maintenant que X est un espace topologique; soit A une partie non-vide de X, et $a \in \overline{A}$; on désigne par $\mathscr{B}$ l'ensemble des parties de X de la forme $A \cap V$, où V est un voisinage quelconque de a.

On dit alors que f a pour limite b lorsque x tend vers a en restant sur A, si

$$b = \lim_{\mathscr{B}} f.$$

EXEMPLE. — Si $X = \mathbf{R}$ et si $A =]a, \rightarrow[$, on désigne par $f(a_+)$ la limite éventuelle de f suivant $\mathscr{B}$ (c'est la limite *à droite*). On définit de même la limite à gauche $f(a_-)$.

Lorsque $a \in A$ et que $\lim_{\mathscr{B}} f$ existe, cette limite ne peut être que $f(a)$ lorsque Y est séparé.

On définirait de la même façon les valeurs d'adhérence de f lorsque x tend vers a en restant sur A.

9. – *Sous-espaces d'un espace topologique.*

Soit E un espace topologique et A un sous-ensemble de E.

Parmi toutes les topologies que l'on peut définir sur A, étudions celles qui rendent continue l'application identique f de A dans E. L'image réciproque d'un ouvert de E par cette application n'est autre que l'intersection de cet ouvert avec A. Donc pour que l'application canonique f soit continue, il faut et il suffit que l'ensemble des ouverts de la topologie de A contienne toutes ces intersections.

Or il est immédiat que les traces sur A des ouverts de E satisfont aux axiomes O_1, O_2, O_3. C'est la topologie qu'elles définissent sur A que nous retiendrons.

Définition 9-*1*. — POUR TOUT SOUS-ENSEMBLE A D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE E ON APPELLE *SOUS-ESPACE* A DE E L'ENSEMBLE A MUNI DE LA TOPOLOGIE DONT LES OUVERTS SONT LES TRACES SUR A DES OUVERTS DE E.

On dit aussi que la topologie de A est induite par celle de E, ou qu'elle est la trace de celle de E.

L'application identique de A dans E est alors continue.

Fermés et voisinages dans un sous-espace. — La formule

$$A \dot{-} A \cap \omega = A \cap \complement \omega$$

où ω est un ouvert de E montre que les fermés du sous-espace A ne sont autres que les traces sur A des fermés de E.

De même, dans le sous-espace A, les voisinages d'un point a de A sont les ensembles $A \cap V$, où V est un voisinage de a dans E.

Z Il faut bien faire attention qu'un ouvert (resp. un fermé) d'un sous-espace A de E n'est pas nécessairement un ouvert (resp. un fermé) de E. Cette remarque est précisée par la proposition suivante :

Proposition 9-2. — *Pour que tout ouvert (resp. fermé) du sous-espace* A *de* E *soit un ouvert (resp. fermé) de* E, *il faut et il suffit que* A *soit ouvert (resp. fermé) dans* E.

En effet si A est ouvert dans E, la trace sur A de tout ouvert de E est ouverte dans E. Inversement, si la trace sur A de tout ouvert de E est ouverte dans E, ceci est vrai de la trace de E sur A, c'est-à-dire de A lui-même.

On a un raisonnement parallèle en remplaçant le mot « ouvert » par « fermé ».

Transitivité des sous-espaces. — Proposition 9-3. — *Soient* X *un espace topologique,* Y *un sous-espace de* X, *et* Z *un sous-ensemble de* Y. *Les topologies sur* Z *induites par celles de* X *et* Y *sont identiques.*

En effet les ouverts du sous-espace Y sont les ensembles de la forme $Y \cap \omega$, où ω est un ouvert de X. Donc les ouverts de Z pour la topologie induite par celle de Y sont les ensembles de la forme $Z \cap (Y \cap \omega)$; or un tel ensemble n'est autre que $Z \cap \omega$; donc il y a identité des ouverts pour les topologies sur Z induites par celles de X et de Y.

Proposition 9-4. — *Soit* f *une application d'un espace topologique* X *dans un sous-espace* Y *d'un espace topologique* Z.

Dire que f *est continue en un point* a *de* X *équivaut à dire que* f, *considérée comme application de* X *dans* Z *est continue en* a.

En effet les voisinages de $f(a)$ dans Y sont les ensembles $V \cap Y$, où V est un voisinage de $f(a)$ dans Z; et comme $f(X) \subset Y$, on a

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(V \cap Y).$$

PROPOSITION 9-5. — *Soit f une application d'un espace X dans un espace Y. Si f est continue au point a, sa restriction à tout sous-espace A contenant a est continue en a.*

En effet, appelons g la restriction de f à A; pour tout voisinage V de $f(a)$ dans Y, on a :

$$g^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V).$$

Donc si $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a dans X, $g^{-1}(V)$ est un voisinage de a dans A.

Par contre il peut arriver que g soit continue en a sans que f le soit; par exemple si f est l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui vaut 0 sur $\mathbf{Q}$ et 1 sur $\complement \mathbf{Q}$, f est discontinue en tout point de $\mathbf{R}$, alors que la restriction de f à $\mathbf{Q}$ est continue (ainsi que la restriction de f à $\complement \mathbf{Q}$).

Il y a toutefois un cas important dans lequel la continuité de g en a équivaut à celle de f : c'est lorsque A est un voisinage de a. En effet dans ce cas, si $A \cap f^{-1}(V)$ est un voisinage de a dans A, c'est aussi un voisinage de a dans X, donc *a fortiori* $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a dans X.

On énonce cette équivalence en disant que la continuité d'une application en un point est une propriété *locale*.

PROPOSITION 9-6. — *Tout sous-espace d'un espace séparé est séparé.*

En effet, soit A un sous-espace d'un espace séparé X. Pour tous $x, y \in A$ tels que $x \neq y$, il existe dans X deux voisinages disjoints V_x, V_y de ces points; les ensembles $A \cap V_x$ et $A \cap V_y$ constituent deux voisinages de x, y dans le sous-espace A, et ils sont disjoints.

APPLICATIONS. — La notion de sous-espace est un moyen commode de définir et d'étudier de nouveaux espaces topologiques. Ainsi tout sous-ensemble A de $\mathbf{R}$ ou de $\mathbf{R}^n$, muni de la topologie induite constitue un espace topologique.

Par exemple, dans $\mathbf{R}^n$ la *sphère* S_{n-1} définie par $\Sigma x_i^2 = 1$ constitue un sous-espace fort intéressant.

On appelle *sphère topologique* de dimension $(n-1)$ tout espace homéomorphe à S_{n-1}; en particulier on appelle *courbe simple fermée* tout espace homéomorphe à S_1.

De même on appelle *arc simple ouvert* (resp. fermé) tout espace homéomorphe à $]0, 1[$ (resp. $[0, 1]$).

Dans $\mathbf{R}$ tous les intervalles ouverts $]a, b[$ (où $a < b$) sont homéomorphes puisque l'on passe de l'un à l'autre par une dilatation de la

forme $x \longrightarrow \alpha x + \beta$; et chacun d'eux est homéomorphe à **R** puisque par exemple la bijection $x \longrightarrow x/(1 + |x|)$ de **R** sur $]-1, 1[$ est une homéomorphie.

Il se trouve également que pour chacun de ces intervalles $]a, b[$, la topologie induite par celle de **R** est identique à la topologie de l'ordre sur $]a, b[$. Mais il ne faudrait pas croire que cette identité s'étende à toute partie de **R**; par exemple sur $A = ([0, 1[) \cup \{2\}$ les deux topologies sont distinctes. Nous allons préciser par un énoncé une classe d'ensembles pour lesquels a lieu cette identité :

9-7. — Soit X un ensemble totalement ordonné ; pour tout intervalle généralisé A de X, la topologie de l'ordre sur A est identique à la trace sur A de la topologie de l'ordre de X.

En effet, tout intervalle ouvert de l'ensemble ordonné A est de la forme $]a, b[$, ou $]\longleftarrow, a[$, ou $]a, \longrightarrow[$, ou A, en désignant par a, b des points de A. Or un tel ensemble est l'intersection de A avec un intervalle ouvert de X; donc une réunion de tels ensembles n'est autre que l'intersection de A avec un ouvert quelconque de X, d'où l'identité des deux topologies.

Par exemple, dans **R**, la topologie de l'ordre sur $[0, 1]$ ou sur $]0, 1[$ est identique à celle induite par la topologie de **R**.

10. — Produit fini d'espaces

Nous avons précédemment défini sur $\mathbf{R}^n$ une topologie déduite de celle de **R** en utilisant des produits d'intervalles ouverts de **R**. Ce procédé peut s'étendre au cas d'un produit quelconque d'espaces. Nous n'étudierons ici que les produits finis d'espaces.

Soit E_i $(i = 1, 2, ..., n)$ une famille finie d'espaces topologiques et soit $E = \Pi E_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ l'ensemble des suites $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ où $x_i \in E_i$. Parmi toutes les topologies possibles sur E nous ne retiendrons que celles pour lesquelles chacune des projections $x \longrightarrow x_i = f_i(x)$ de E dans E_i est continue ; cette condition revient à dire que pour chaque ouvert $\omega_i \subset E_i$, l'ensemble $f_i^{-1}(\omega_i)$ qui n'est autre que le produit

$$E_1 \times ... \times E_{i-1} \times \omega_i \times E_{i+1} ... \times E_n,$$

doit être ouvert dans E. Il doit donc en être de même aussi de toute intersection finie de tels ensembles, c'est-à-dire des ensembles de la forme $\Pi\, \omega_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ et de toute réunion d'ensembles de cette forme. Si l'on peut vérifier que ces derniers satisfont aux axiomes O_1, O_2, O_3, il sera naturel de prendre comme topologie sur E la topologie qu'ils définissent.

On est donc conduit aux définitions suivantes :

Définition 10-*1*. — ON APPELLE *OUVERT ÉLÉMENTAIRE* DE $E = \Pi E_i$ TOUT ENSEMBLE DE E DE LA FORME $p = \Pi\ \omega_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ OÙ ω_i EST UN OUVERT QUELCONQUE DE E_i.

ON APPELLE OUVERT DE E TOUTE RÉUNION D'OUVERTS ÉLÉMENTAIRES.

La famille de ces ouverts satisfait évidemment aux axiomes O_1 et O_3. Elle satisfait aussi à O_2, car si

$$A = \bigcup_{j \in J} p_j \quad \text{et} \quad A' = \bigcup_{k \in K} p'_k,$$

on a

$$A \cap A' = \bigcup_{(j,k) \in J \times K} (p_j \cap p'_k)$$

et chaque $(p_j \cap p'_k)$ est encore un ouvert élémentaire.

Ces ouverts définissent donc une topologie sur E. Par construction, cette topologie est telle que pour chaque i la projection de E sur E_i soit une application continue. On appelle E muni de cette topologie le *produit topologique* des espaces E_i.

EXEMPLES.— 1° Nous avons défini au § 4 une topologie sur $\mathbf{R}^n$; nous y avons pris comme ouverts les réunions de pavés ouverts; mais comme tout ouvert de $\mathbf{R}$ est une réunion d'intervalles ouverts, la topologie sur $\mathbf{R}^n$ définie au moyen de ces pavés ouverts est identique à la topologie produit.

2° Le produit $S_1 \times \mathbf{R}$ est un espace topologique qu'on appelle *cylindre.*

3° Le produit $(S_1)^n$ s'appelle *tore* à n dimensions.

Z Pour tout ouvert Ω du produit E des E_i, la projection de Ω sur chaque E_i est un ensemble ouvert, puisque c'est la réunion des projections ω_i des ouverts élémentaires $p = \Pi\omega_i$ dont la réunion est Ω.

Par contre il est faux que la projection d'un fermé A de E soit toujours un fermé. Exemple : le fermé $A = \{(x, y) : xy = 1\}$ de l'espace produit $\mathbf{R}^2$.

Produit de sous-espaces. — Si A_i désigne un sous-espace de E_i, on vérifiera que la topologie produit sur $A = \Pi\ A_i$ est identique à la topologie induite par celle de $\Pi\ E_i$ sur son sous-ensemble A.

En particulier, pour tout $a_i \in E_i\ (i = 2, 3, \ldots, n)$, l'espace E_1 est homéomorphe au sous-espace $E_1 \times \{a_2\} \times \ldots \times \{a_n\}$ de E dans l'application $x_1 \longrightarrow (x_1, a_2, \ldots, a_n)$.

ASSOCIATIVITÉ DU PRODUIT TOPOLOGIQUE. — Si A, B, C sont trois espaces topologiques, la correspondance canonique biunivoque entre les espaces $(A \times B) \times C$ (resp. $A \times (B \times C)$) et $A \times B \times C$ est une homéomorphie.

Il suffit (voir § 5) de montrer que cette correspondance conserve les voisinages. Or tout point $(a\ b, c)$ de $(A \times B) \times C$ possède une base de voisinages constituée par les ensembles :

$$(\omega_a \times \omega_b) \times \omega_c;$$

et tout point (a, b, c) de $(A \times B \times C)$ possède une base de voisinages constituée par les ensembles $\omega_a \times \omega_b \times \omega_c$ (où ω_a, ω_b, ω_c désignent des voisinages ouverts de a, b, c dans A, B, C). Or, les ensembles $(\omega_a \times \omega_b) \times \omega_c$ et $\omega_a \times \omega_b \times \omega_c$ sont homologues dans la correspondance biunivoque canonique, d'où la propriété cherchée.

Cette associativité nous permettra de simplifier certaines démonstrations en ne les faisant que pour un produit de deux espaces.

Commutativité. — On vérifiera aisément que le produit topologique est commutatif en ce sens que, par exemple, la bijection canonique $(x,y) \longrightarrow (y,x)$ de $A \times B$ sur $B \times A$ est une homéomorphie.

Applications continues dans un espace produit. — On désigne en général une application $x \longrightarrow f(x)$ d'un espace E dans un espace produit $F = \Pi F_i$ par les applications coordonnées $x \longrightarrow f_i(x)$ de E dans chaque F_i. Le rapport étroit entre la continuité de f et celle des f_i résulte de la proposition suivante :

PROPOSITION **10**-2. — *Pour que l'application f de E dans le produit fini $F = \Pi F_i$ soit continue en a, il faut et il suffit que chacune des applications coordonnées f_i de E dans F_i soit continue en a.*

En effet, si f est continue en a, comme $f_i = \text{pr}_i \circ f$, où pr_i désigne l'opération projection de F sur F_i, l'application f_i est continue en a. Inversement, supposons que chaque f_i soit continue en a; pour tout ouvert élémentaire $\omega = \Pi \omega_i$ de F, contenant $f(a)$, $f_i^{-1}(\omega_i)$ est un voisinage de a dans E, donc $f^{-1}(\omega)$ qui est égal à

$$\bigcap_i f_i^{-1}(\omega_i)$$

est aussi un voisinage de a. Comme tout voisinage V de $f(a)$ dans F contient un ouvert élémentaire ω contenant $f(a)$, $f^{-1}(V)$ qui contient $f^{-1}(\omega)$ est *a fortiori* un voisinage de a.

EXEMPLE. — Soient u_1, u_2 deux applications continues de E dans F_1, F_2 respectivement et soit $g : (y_1, y_2) \longrightarrow g(y_1, y_2)$ une application continue de $F_1 \times F_2$ dans un espace G.

Alors l'application $x \longrightarrow g\big(u_1(x), u_2(x)\big)$ de E dans G est continue.

Applications d'un espace produit dans un autre espace. —

Soit $$f: (x, y) \longrightarrow f(x, y)$$
une application d'un produit $X \times Y$ dans un espace F.

Si f est continue, sa restriction à tout sous-espace de $X \times Y$ est continue; en particulier, pour tout $a \in X$, la restriction de f à $(a \times Y)$ est continue; autrement dit, puisque l'application $y \longrightarrow (a, y)$ de Y sur $(a \times Y)$ est une homéomorphie, l'application $y \longrightarrow f(a, y)$ de Y dans F est continue.

Autrement dit la continuité de f entraîne celle des applications partielles $x \longrightarrow f(x, b)$ et $y \longrightarrow f(a, y)$.

Z Mais la *réciproque est fausse*; en effet, soit f l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$f(0,0) = 0 \ \text{ et } \ f(x, y) = xy/(x^2+y^2) \ \text{ si } \ (x, y) \neq (0,0).$$

Il est immédiat que toutes les applications partielles sont continues; et cependant f n'est pas continue en 0 puisque, par exemple, pour tout $x \neq 0$

$$f(x, x) = 1/2$$

alors que $$f(0,0) = 0.$$

On pourrait construire des exemples analogues dans lesquels l'ensemble des points de discontinuité de f serait partout dense dans $\mathbf{R}^2$.

Limites dans un espace produit. — On démontrera de la même façon que la proposition 10-2, l'énoncé suivant :

PROPOSITION **10-3**. — *Pour qu'une suite* (a_n) *de points de* $F = \Pi F_i$ *converge vers le point* $l = (l_i)$ *de* F, *il faut et il suffit que pour tout* i, *la suite* $(a_n)_i$ *converge vers* l_i.

Plus généralement, soit $\mathcal{B}$ une base de filtre sur un ensemble E, soit $f = (f_i)$ une application de E dans un espace topologique produit $F = \Pi F_i$, et soit $l = (l_i)$ un point de F.

On vérifiera que

$$(l = \lim_{\mathcal{B}} f) \iff (\text{Pour tout } i,\ l_i = \lim_{\mathcal{B}} f_i).$$

Produit d'espaces séparés

PROPOSITION **10-4**. — *Si les espaces* E_i *sont séparés, leur produit* E *l'est aussi.*

Il suffit évidemment de le démontrer pour le produit de deux espaces E_1, E_2.

Or si a et b sont deux points distincts de E, de coordonnées (a_1, a_2) et (b_1, b_2), on a, soit $a_1 \neq b_1$, soit $a_2 \neq b_2$. Si par exemple $a_1 \neq b_1$, les points a_1 et b_1 de E_1 possèdent deux voisinages disjoints V_1 et W_1; les points a et b possèdent donc aussi deux voisinages disjoints $V_1 \times E_2$ et $W_1 \times E_2$.

EXEMPLE. — Comme $\mathbf{R}$ est séparé, tout espace $\mathbf{R}^n$ l'est aussi.

Tout sous-espace de $\mathbf{R}^n$ l'est donc aussi; en particulier S_{n-1} est séparé.

PROPOSITION **10-5**. — *Pour tout espace séparé* E, *la diagonale* Δ *de* $E \times E$ *est fermée dans* $E \times E$.

En effet, soit $(a, b) \notin \Delta$; les points a, b de E étant distincts admettent deux voisinages disjoints V_a, V_b; le produit $V_a \times V_b$ est un voisinage de

(a, b) dans $E \times E$ et ne rencontre pas Δ, donc $(E \times E \dot{-} \Delta)$ est un voisinage de (a, b).

Le complémentaire de Δ étant voisinage de chacun de ses points est ouvert, donc Δ est fermé.

COROLLAIRE 1. — *Si f, g sont deux applications continues d'un espace* X *dans un espace* séparé E, *l'ensemble des points x de* X *tels que $f(x) = g(x)$ est fermé.*

En effet, soit h l'application $x \longrightarrow (f(x), g(x))$ de X dans $E \times E$; elle est continue; et l'ensemble cherché n'est autre que $h^{-1}(\Delta)$; cet ensemble est fermé puisque Δ est fermé.

COROLLAIRE 2. — *Si f est une application* continue *d'un espace* E *dans un espace séparé* F, *le graphe Φ de f est fermé dans* $E \times F$.

En effet, Φ est l'ensemble des points (x, y) de $E \times F$ tels que $y = f(x)$; or les applications $(x, y) \longrightarrow y$ et $(x, y) \longrightarrow f(x)$ de $E \times F$ dans F sont continues; donc Φ est fermé d'après le corollaire précédent.

Z Il faut noter que la réciproque du corollaire 2 est fausse : Même si E et F sont séparés, le graphe de f peut être fermé sans que f soit continue.

Par exemple, soit f l'application de **R** dans **R** ainsi définie :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = 1/x \quad \text{si} \quad x \neq 0 .$$

Le graphe de f est la réunion de la courbe $xy - 1 = 0$ et de l'ensemble $\{0\}$, donc il est fermé; et cependant f n'est pas continue au point 0.

11. — Espaces compacts

Dans le § 3, nous avons établi une propriété importante des intervalles fermés bornés de **R**, qu'on désigne sous le nom de théorème de Heine-Borel-Lebesgue; son importance provient de ce qu'il permet de remplacer certaines études globales par une étude locale.

Aussi a-t-on recherché d'autres espaces topologiques possédant une propriété analogue; nous verrons par exemple que c'est le cas pour tous les ensembles fermés et bornés de $\mathbf{R}^n$.

Nous allons faire ici une étude générale des espaces qui possèdent cette propriété.

Définition 11-*1*. — ON DIT QU'UN ESPACE E EST *COMPACT* S'IL EST SÉPARÉ ET SI DE TOUT RECOUVREMENT OUVERT DE E ON PEUT EXTRAIRE UN SOUS-RECOUVREMENT FINI.

Dans cette définition la condition que E est séparé a pour seul but d'éliminer des espaces peu utilisables tels que les espaces à topologie grossière.

EXEMPLES. — Tout espace séparé fini est compact. Par contre **R** n'est pas un espace compact (voir § 3). Les théorèmes qui suivent vont nous fournir de vastes classes d'espaces compacts.

Il est bon de connaître plusieurs formes équivalentes de la condition de compacité. En voici deux autres :

Formulation 11-*2*. — E EST SÉPARÉ, ET DE TOUTE FAMILLE DE FERMÉS DE E DONT L'INTERSECTION EST VIDE, ON PEUT EXTRAIRE UNE SOUS-FAMILLE FINIE AYANT LA MÊME PROPRIÉTÉ.

Cette condition est duale de la précédente; en effet si $(G_\iota)_{\iota\in I}$ est une famille d'ouverts de E, la formule $E = \bigcup_{\iota\in I} G_\iota$ équivaut à

$$\emptyset = \bigcap_{\iota\in I} F_\iota \qquad \text{où } F_\iota = \complement G_\iota .$$

Disons maintenant qu'une famille $\mathcal{F}$ de parties de E possède la *propriété de l'intersection finie* si toute sous-famille finie de $\mathcal{F}$ a une intersection non vide. Avec cette convention l'énoncé précédent équivaut évidemment au suivant :

Formulation 11-*3*. — E EST SÉPARÉ, ET TOUTE FAMILLE DE FERMÉS DE E QUI POSSÈDE LA PROPRIÉTÉ DE L'INTERSECTION FINIE, A UNE INTERSECTION NON VIDE.

En particulier on peut énoncer :

PROPOSITION **11-*4*.** — *Dans* E *compact, toute famille, totalement ordonnée par inclusion, de fermés non vides, a une intersection non vide. Par exemple toute suite décroissante de fermés non vides a une intersection non vide.*

En effet toute sous-famille finie d'une famille totalement ordonnée d'ensembles possède un plus petit élément, qui est donc l'intersection — ici non vide — de cette sous-famille.

La droite réelle ne possède pas cette dernière propriété puisque par exemple la suite des intervalles fermés $[n, +\infty[$ $(n = 1, 2, ...)$ a une intersection vide.

PROPOSITION **11-*5*.** — *1° Dans un espace compact, toute suite de points possède au moins une valeur d'adhérence.*

2° Si elle a une seule valeur d'adhérence, la suite converge vers cette valeur.

1° En effet, avec les notations utilisées après la définition 8-*4*, l'ensemble des valeurs d'adhérence est l'intersection de la suite décroissante des fermés non vides $\overline{A}_n$.

2° Soit a l'élément unique de $A = \bigcap_{1}^{\infty} \overline{A}_n$. Pour tout voisinage ouvert V de a, les fermés $\overline{A}_n \cap \complement V$ ont évidemment une intersection vide; donc puisqu'ils constituent une suite décroissante, l'un d'eux est vide, autrement dit, à partir d'un certain n, on a $\overline{A}_n \subset V$ et *a fortiori* $a_n \subset V$.

Plus généralement, on vérifiera que toute application f d'un ensemble X muni d'une base de filtre $\mathscr{B}$, dans un espace compact E, a au moins une valeur d'adhérence suivant $\mathscr{B}$, et que si f a une seule valeur d'adhérence, f converge vers cette valeur.

Z Il n'est pas toujours exact que, dans un espace compact, l'*ensemble* A des points d'une suite $\{a_n\}$ ait un point d'accumulation; il peut arriver en effet que A soit fini, ou même réduit à un seul point, comme c'est le cas si tous les a_n sont identiques. Autrement dit, un point peut être adhérent à une suite (a_n), soit parce qu'il est point d'accumulation de l'ensemble A des a_n, soit parce qu'il coïncide avec une infinité de ces a_n.

PROPOSITION **11-*6*** (analogue au théorème de *Bolzano-Weierstrass*.) —
1° Toute partie infinie A *d'un espace compact* E *a au moins un point d'accumulation dans* E.

2° Toute partie A *de* E *qui n'a aucun point d'accumulation dans* E *est finie.*

Il est clair que ces deux propriétés sont équivalentes; la seconde se démontre exactement comme le théorème 3-*3*.

Z Il est inexact qu'inversement tout espace E séparé dont toute partie infinie a au moins un point d'accumulation soit compact; toutefois nous démontrerons plus tard que cette réciproque est exacte pour les espaces E métriques.

PROPOSITION **11-*7***. — *Soit* A *un sous-espace séparé d'un espace* E:
*(*A *est compact)* $\Longleftrightarrow$ *(Toute famille d'ouverts de* E *qui recouvre* A *contient une sous-famille finie qui le recouvre aussi).*

DÉMONSTRATION. — 1° Si A est compact, et si $(\omega_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille d'ouverts de E qui recouvre A, les $(A \cap \omega_\iota)_{\iota \in I}$ constituent un recouvrement ouvert de l'espace compact A; il existe donc une partie finie J de I telle que les $(A \cap \omega_\iota)_{\iota \in J}$ recouvrent A; *a fortiori* les $(\omega_\iota)_{\iota \in J}$ recouvrent aussi A.

2° Inversement, supposons que A possède la deuxième propriété. Soit $(\omega'_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'ouverts de A qui recouvre A; tout ω'_ι est de la forme $\omega'_\iota = A \cap \omega_\iota$, où ω_ι est un ouvert de E.

Les ω_ι recouvrent A, donc il existe une partie finie J de I telle que les $(\omega_\iota)_{\iota \in J}$ recouvrent aussi A.

Or $$\bigcup_{\iota \in J} (A \cap \omega_\iota) = A \cap (\bigcup_{\iota \in J} \omega_\iota) = A,$$

donc la famille finie $(\omega'_\iota)_{\iota \in J}$ recouvre bien A.

Il est donc bien exact que de tout recouvrement de A par des ouverts (ω'_ι) on peut extraire un sous-recouvrement fini; donc A est compact.

COROLLAIRE 11-*8*. — *Pour tous $a, b \in \mathbf{R}$, l'intervalle fermé $[a, b]$ est compact.*

C'est une conséquence immédiate du théorème 3-*2*, et de la proposition 11-*7* qu'on vient de démontrer.

COROLLAIRE 11-*9*. — *Soit* E *un espace séparé et soit (a_n) une suite de points de* E *qui converge vers un point a de* E.

Alors l'ensemble $A = \{a, a_1, a_2, ...\}$ *est compact.*

En effet, d'abord A est séparé; puis soit (ω_ι) un recouvrement de A par des ouverts de E. Il existe un ω_{ι_0} qui contient a; cet ouvert est voisinage de a, donc contient tous les a_n sauf au plus un nombre fini $a_{n_1}, ..., a_{n_p}$; ces points sont contenus respectivement dans des ouverts $\omega_{\iota_1}, ..., \omega_{\iota_p}$. Les ouverts $\omega_{\iota_0}, \omega_{\iota_1}, ..., \omega_{\iota_p}$ constituent un recouvrement fini de A. Donc A est bien compact.

Voici maintenant une suite de théorèmes d'importance fondamentale.

THÉORÈME 11-*10*. — *Dans un espace compact* E, *tout point a admet une base de voisinages fermés.*

DÉMONSTRATION. — Soit ω un voisinage ouvert de a, et soit F le fermé complémentaire de ω. Si aucun voisinage fermé V de a n'est contenu dans ω, c'est que tous les V rencontrent F ; et comme la famille des V est stable par intersection finie, la famille des $V \cap F$ a la propriété de l'intersection finie, donc a une intersection non vide ; autrement dit tous les V ont un point commun $b \neq a$. Mais ceci est impossible puisque E est séparé (voir 8-*2*). Donc il existe un V contenu dans ω.

THÉORÈME 11-*11*. — *Dans tout espace compact* E, *tout sous-ensemble fermé est un sous-espace compact.*

DÉMONSTRATION. — Pour avoir une démonstration simple, nous utiliserons un critère de compacité qui soit bien adapté à notre problème, par exemple le critère 11-*3* qui s'exprime en termes d'ensembles fermés.

Soit A fermé dans E. Soit $(X_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de fermés de l'espace A, possédant la propriété de l'intersection finie.

Comme A est fermé, les X_ι sont aussi des fermés de E; donc comme E est compact, l'intersection des X_ι n'est pas vide. Donc A est compact.

THÉORÈME **11**-*12*. — *Dans tout espace séparé* E, *tout sous-espace compact de* E *est fermé dans* E.

Soit A le sous-espace compact de E. Nous allons montrer que $\complement$ A est ouvert.

Soit $x_0 \in \complement$ A; pour tout $y \in$ A, soient V_y et W_y deux voisinages *ouverts disjoints* de x_0 et y respectivement. Il existe une sous-famille finie $(W_{y_\iota})_{\iota \in I}$ d'ouverts W_y qui recouvrent A. L'ouvert $V = \bigcap_{\iota \in I} V_{y_\iota}$ est un voisinage de x_0 et est disjoint de chacun des W_{y_ι} donc aussi de A; autrement dit $V \subset \complement$ A Ainsi $\complement$ A est voisinage de chacun de ses points; il est donc ouvert.

Remarquons que l'hypothèse que E est séparé est essentielle. Par exemple si E a la topologie grossière et comprend plus d'un point, tout sous-ensemble de E réduit à un point est un sous-espace compact et pourtant il n'est pas fermé.

Ce théorème montre que tout espace compact pourrait être appelé « absolument fermé » puisqu'il est fermé dans tout espace qui le contient (du moins si celui-ci est séparé).

COROLLAIRE **11**-*13* (DES THÉORÈMES **11**-*11* ET **11**-*12*). — *Dans tout espace compact* E, *il y a identité entre la classe des sous-ensembles fermés et celle des sous-ensembles compacts.*

COROLLAIRE **11**-*14*. — *Les sous-espaces compacts de* **R** *sont les parties fermées et bornées de* **R**.

En effet, si X est une partie fermée et bornée de **R**, il existe un intervalle $[a, b]$ contenant X; comme X est fermé dans **R**, il l'est aussi dans le sous-espace $[a, b]$, et comme $[a, b]$ est compact, X est aussi compact.

Inversement si X est une partie compacte de **R**, X est fermé dans **R** puisque **R** est séparé; d'autre part X est borné puisque de la suite des ouverts $]-n, n[$ (où $n = 1, 2, \ldots$) qui constitue un recouvrement de X on peut extraire une suite finie d'intervalles qui recouvrent X, et que le plus grand de ceux-ci contient X.

THÉORÈME **11**-*15*. — *Dans tout espace séparé, la réunion de deux compacts est un compact; toute intersection de compacts est un compact.*

DÉMONSTRATION. — Soient A et B deux compacts de E.

1° Comme E est séparé, $A \cup B$ l'est aussi.

D'autre part tout recouvrement ouvert de $(A \cup B)$ est aussi un recouvrement ouvert de A et de B. On peut donc en extraire deux recouvrements finis, l'un de A, l'autre de B; au total ils constituent un recouvrement fini de $(A \cup B)$. Donc $A \cup B$ est compact.

2° Si les $(A_\iota)_{\iota \in I}$ sont compacts, chacun d'eux est fermé dans E, donc leur intersection est fermée dans E, et *a fortiori* dans l'un quelconque A_{ι_0} de ces compacts. Cette intersection est donc un compact (théorème 11-*10*).

Z Evidemment la réunion d'une famille infinie de compacts n'est pas en général un compact.

THÉORÈME **11**-*16*. — *Pour toute application continue* f *d'un espace compact* E *dans un espace séparé* F, *le sous-espace* f(E) *de* F *est compact.*

DÉMONSTRATION. — D'abord f(E) est séparé puisque F l'est. Ensuite, soit $(\omega_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement de f(E) par des ouverts de f(E). Les $f^{-1}(\omega_\iota)$ constituent un recouvrement ouvert de E; on peut en extraire un recouvrement fini $\left(f^{-1}(\omega_\iota)\right)_{\iota \in J}$; comme $f\left(f^{-1}(\omega_\iota)\right) = \omega_\iota$, les $(\omega_\iota)_{\iota \in J}$ recouvrent aussi f(E). Donc f(E) est compact.

COROLLAIRE **11**-*17*. — *Toute bijection continue* f *d'un espace compact* E *sur un espace séparé* F *est une homéomorphie.*

Il suffit de montrer que f^{-1} est continue, donc que pour tout fermé X de E, f(X) est fermé dans F.

Or X est fermé dans E compact, donc est compact; son image f(X) dans F séparé est donc compacte, donc aussi fermée.

Ce corollaire nous fournit donc un cas important où la continuité et la biunivocité d'une application entraînent sa bicontinuité (c'est-à-dire la continuité de f et f^{-1}).

COROLLAIRE **11**-*18*. — *Toute fonction numérique continue sur un espace compact* E *est bornée sur* E *et atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure sur* E.

Soit f une application continue de E dans **R**; f(E) est compact, donc fermé et borné dans **R**, donc contient sa borne inférieure b_1 et sa borne supérieure b_2; il existe donc un x_1 dans E tel que $f(x_1) = b_1$ et un x_2 tel que $f(x_2) = b_2$.

En particulier si $f(x) > 0$ sur E, il existe un $b > 0$ tel que $f(x) \geqslant b$ sur E.

Z Si E n'est pas compact, une fonction numérique continue sur E peut ne pas être bornée et, lorsqu'elle est bornée, peut ne pas atteindre ses bornes.

Par exemple la fonction $x \longrightarrow x$ n'est pas bornée sur **R**.

La fonction $x \longrightarrow x/(1+|x|)$ est bornée sur **R** mais n'y atteint aucune de ses bornes.

La fonction $x \longrightarrow 1/x$ n'est pas bornée sur $]0, 1]$.

La fonction $x \longrightarrow x$ est bornée sur $]0, 1[$ mais n'y atteint aucune de ses bornes.

COROLLAIRE **11**-*19*. — *Si* E *est un produit d'espaces séparés* E_ι, *la projection de tout compact de* E *dans chacun des* E_ι *est compacte.*

En effet la projection dans chaque E_ι est une application continue.

Produit d'espaces compacts. — Les théorèmes 11-*11* et 11-*16* nous fournissaient un moyen puissant de construction d'espaces compacts. En voici un autre, particulièrement commode pour l'étude des fonctions de plusieurs variables.

THÉORÈME **11**-*20*. — *Tout produit fini d'espaces compacts est compact.*

DÉMONSTRATION. — D'après l'associativité du produit topologique, il suffit de démontrer le théorème pour le produit de deux espaces.

Soient $E = X \times Y$ le produit des espaces compacts X et Y. Comme X et Y sont séparés, E est séparé (proposition 10-*4*).

Soit maintenant $(\omega_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement ouvert de E. Pour tout $m = (x, y) \in E$, il existe un $i_m \in I$ tel que $m \in \omega_{\iota_m}$. Il existe donc des voisinages ouverts V_m et W_m de x et y dans X et Y tels que $V_m \times W_m \subset \omega_{\iota_m}$; posons $U_m = V_m \times W_m$.

Or pour tout $x_0 \in X$, le sous-ensemble $Y_0 = x_0 \times Y$ de $X \times Y$ est homéomorphe à Y, donc compact.

Les $(U_m)_{m \in Y_0}$ constituent un recouvrement ouvert de Y_0; on peut en extraire un recouvrement fini :

$$(U_{m_j})_{j \in J} \quad \text{où} \quad m_j = (x_0, y_j)\,.$$

Posons
$$V_{x_0} = \bigcap_{j \in J} V_{m_j};$$

c'est un voisinage ouvert de x_0 et il est clair que

$$\bigcup_{j \in J} \omega_{\iota_{m_j}} \supset V_{x_0} \times Y.$$

Les V_{x_0} constituent un recouvrement ouvert de X; on peut en extraire un recouvrement fini. A chacun des points x_0 (en nombre fini) correspondants est associée une sous-famille $(\omega_{\iota_{m_j}})$ d'ouverts ω_ι; la réunion de ces familles est une famille finie qui recouvre E.

COROLLAIRE **11**-*21*. — *Les sous-espaces compacts de* $\mathbf{R}^n$ *sont les sous-ensembles fermés et bornés de* $\mathbf{R}^n$ *(A est dit borné dans* $\mathbf{R}^n$ *s'il est contenu dans un pavé de bases bornées.)*

En effet si A est un compact de $\mathbf{R}^n$, il est fermé dans $\mathbf{R}^n$; d'autre part la projection de A sur chaque espace facteur **R** est compacte, donc contenue dans un intervalle borné; donc A est contenu dans un pavé de bases bornées.

Inversement, si A est fermé et borné, c'est un sous-ensemble fermé d'un produit fini d'intervalles $[a_i, b_i]$ compacts; un tel produit est compact, donc A l'est aussi.

EXEMPLE. — La sphère S_{n-1} de $\mathbf{R}^n$ est fermée et bornée, donc compacte. Il en résulte que le tore $(S_1)^n$ est aussi compact.

Ensembles relativement compacts d'un espace topologique. — Nous avons vu que les compacts de $\mathbf{R}^n$ ne sont autres que les parties fermées et bornées de $\mathbf{R}^n$; or toute partie bornée de $\mathbf{R}^n$ a une fermeture bornée; il y a donc identité entre les parties bornées de $\mathbf{R}^n$ et les parties de $\mathbf{R}^n$ dont la fermeture est compacte.

Aussi peut-on s'attendre à ce que dans un espace topologique quelconque, les ensembles qui jouent le rôle d'ensembles bornés soient les ensembles à fermeture compacte; on a donné à ces ensembles un nom spécial :

Définition 11-*22*. — ON DIT QU'UNE PARTIE A D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE E EST *RELATIVEMENT COMPACTE* SI SA FERMETURE $\overline{A}$ EST COMPACTE.

Il est évident que cette définition n'est pas topologique pour A, mais seulement pour le couple (A, E); par exemple l'intervalle] 0, 1 [est relativement compact dans **R**, mais ne l'est pas dans lui-même.

Voici quelques propriétés immédiates :

1° Si A est relativement compact dans E, toute partie de A l'est aussi.

2° Toute partie d'un espace compact E est relativement compacte dans E.

3° Si $A_1, A_2, ..., A_n$ sont relativement compacts dans un espace E séparé, leur réunion l'est aussi.

4° Toute suite de points d'une partie relativement compacte A de E a au moins une valeur d'adhérence dans E.

12. — Espaces localement compacts; compactification

Il existe de nombreux espaces qui, sans être compacts, se comportent localement comme un espace compact; c'est le cas de **R** par exemple. De façon précise :

Définition 12-*1*. — ON APPELLE ESPACE *LOCALEMENT COMPACT* TOUT ESPACE SÉPARÉ E DONT TOUT POINT POSSÈDE AU MOINS UN VOISINAGE COMPACT.

EXEMPLES. — 1° Tout espace compact est localement compact.

2° Tout espace topologique discret est localement compact (exemple **Z**).

3° La droite **R** est localement compacte ; en effet, d'abord **R** est séparée ; ensuite, pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe a, $b \in \mathbf{R}$ tels que $a < x < b$ et $[a, b]$ est un voisinage compact de x.

Nous savons d'ailleurs que **R** n'est pas compacte.

4° Le sous-espace **Q** de **R** n'est ni compact, ni localement compact ; en effet, supposons par exemple que 0 possède dans **Q** un voisinage compact V ; le voisinage V de 0 contient un sous-voisinage de la forme $\mathbf{Q} \cap [-a, a]$; comme ce dernier est fermé dans **Q**, l'ensemble $A = \mathbf{Q} \cap [-a, a]$ serait alors compact ; or ceci est manifestement faux puisque, pour tout irrationnel $x \in [-a, a]$, la suite décroissante des fermés $A \cap [x - 1/n,\ x + 1/n]$ a une intersection vide.

PROPOSITION 12-*2*. — *Dans un espace localement compact, tout point admet une base de voisinages compacts.*

DÉMONSTRATION. — En effet, dans E localement compact, soit ω un voisinage ouvert d'un point a. Par hypothèse, a admet un voisinage compact K. Dans l'espace compact K, a admet un voisinage V, fermé donc aussi compact, contenu dans $K \cap \omega$ (voir 11-*10*). Or V est un voisinage de a dans E puisque K en est un, donc c'est le voisinage compact cherché.

Voici maintenant quelques énoncés qui fournissent des procédés puissants de construction d'espaces localement compacts.

PROPOSITION 12-*3*. — *Tout sous-ensemble fermé d'un espace localement compact est localement compact.*

DÉMONSTRATION. — Soient E un espace localement compact, A un sous-ensemble fermé de E. Tout $x \in A$ a dans E un voisinage compact V. L'ensemble $V \cap A$ est fermé dans V, donc est compact ; comme c'est un voisinage de x dans A, ce point a bien dans A un voisinage compact. Enfin A est séparé puisqu'il est contenu dans l'espace séparé E ; donc il est bien localement compact.

EXEMPLE. — Toute variété algébrique de $\mathbf{R}^n$ est localement compacte.

PROPOSITION 12-*4*. — *Si* A et B *sont deux sous-espaces localement compacts d'un espace séparé, leur* intersection *est aussi localement compacte.*

DÉMONSTRATION. — D'abord $A \cap B$ est séparé ; ensuite, pour tout $x \in A \cap B$ il existe deux voisinages compacts V et W de x, dans A et B

respectivement. L'ensemble $V \cap W$ est un voisinage de x dans $A \cap B$, et il est compact.

Z Par contre la *réunion* de A et B peut ne pas être localement compacte. Par exemple soit A la partie de $\mathbf{R}^2$ constituée par les points (x, y) tels que $x > 0$; et soit $B = \{(0, 0)\}$; l'ensemble $A \cup B$ n'est pas localement compact puisque le point $(0, 0)$ n'a aucun voisinage compact dans $A \cup B$.

PROPOSITION 12-*5*. — *Tout produit fini d'espaces localement compacts l'est aussi.*

DÉMONSTRATION. — Il suffit évidemment de le montrer pour deux espaces A, B.

Comme A, B sont séparés, $A \times B$ l'est aussi.

D'autre part, pour tout $(x, y) \in A \times B$, les points x et y ont dans A, B respectivement des voisinages compacts V, W. Le produit $V \times W$ est le voisinage compact cherché de (x, y).

EXEMPLE. — Les espaces $\mathbf{R}^n$ et $S_1 \times \mathbf{R}$ sont localement compacts.

Z Le théorème 11-*16* n'a pas d'équivalent pour les espaces localement compacts; autrement dit, il est faux que tout espace séparé qui est l'image d'un espace localement compact par une application continue soit aussi localement compact.

Par exemple, $\mathbf{Q}$ étant dénombrable, il existe une surjection $n \longrightarrow f(n)$ de $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{Q}$; comme $\mathbf{Z}$ est discret, f est continue. Or $\mathbf{Q}$ n'est pas localement compact, alors que $\mathbf{Z}$ l'est.

PROPOSITION 12-*6*. — *Soit* E *un espace localement compact mais non compact, et soit f une fonction numérique continue sur* E, *telle que*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

(en ce sens que pour tout $h > 0$, il existe un compact $K \subset E$ tel que $f(x) > h$ hors de K*).*

Alors f est minorée et atteint sa borne inférieure.

DÉMONSTRATION. — Soit a un point quelconque de E, et soit h un nombre $> f(a)$.

Par hypothèse il existe un compact $K \subset E$ tel que $f(x) > h$ hors de K. La restriction de f à K est continue, donc a une borne inférieure m atteinte en un point b de K.

Pour tout $x \notin K$, on a

$$f(x) > h > f(a) \geqslant m.$$

Pour tout $x \in K$, on a

$$f(x) \geqslant m.$$

Donc m est la borne inférieure de f dans E; elle est atteinte au point b.

Remarquons que l'ensemble des x tels que $f(x) = m$ est fermé et contenu dans K; donc c'est un ensemble compact.

On pourrait démontrer de façon analogue que toute fonction numérique continue f sur E, qui tend vers une limite finie l quand $x \to \infty$ (autrement dit suivant la base de filtre constituée par les complémentaires des compacts de E), est bornée et atteint chacune de ses bornes qui diffère de l.

EXEMPLE **12**-*7* : *Théorème de d'Alembert-Gauss* — Soit $P(z)$ un polynôme quelconque en z à coefficients complexes et de degré > 0. La fonction numérique $z \longrightarrow |P(z)|$ est continue dans le plan complexe C ; d'autre part, si $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots$ (avec $a_n \neq 0$), on peut écrire pour tout $z \neq 0$:

$$|P(z)| = |a_n| \times |z|^n \times |1 + a_1/z + a_2/z^2 + \ldots + a_n/z^n|.$$

Donc $|P(z)| \to +\infty$ lorsque $z \to \infty$.

Les hypothèses de la proposition 12-*6* sont vérifiées ; on peut donc affirmer que $|P(z)|$ atteint sa borne inférieure en un point.

Nous allons démontrer que $P(z_0) = 0$; posons pour cela $z = z_0 + u$; on a :

$$P(z) = P(z_0 + u) = c_0 + c_1 u + \ldots + c_n u^n.$$

On veut démontrer que $c_0 = 0$. Supposons $c_0 \neq 0$, et soit c_p le premier coefficient non nul après c_0 ($p \leqslant n$).

Si λ désigne une racine quelconque de l'équation

$$\lambda^p + \frac{c_0}{c_p} = 0,$$

et si on pose $u = \lambda v$, le polynôme $P(z)$ devient :

$$P(z) = c_0 [1 - v^p + v^p \varepsilon(v)],$$

où $\varepsilon(v)$ tend vers 0 avec v.

Pour tout v réel tel que $0 < v \leqslant 1$, on a :

$$|P(z)| \leqslant |c_0| [(1 - v^p) + v^p |\varepsilon(v)|] = |c_0| [1 - v^p (1 - |\varepsilon(v)|)];$$

On a donc $|P(z)| < |c_0|$ dès que v est assez petit pour que $|\varepsilon(v)| < 1$. On est donc conduit à une contradiction en supposant $c_0 \neq 0$; en résumé : Tout polynôme $P(z)$ de degré > 0 a au moins une racine.

Points à l'infini et compactification. — Dans l'énoncé de la proposition 12-*6*, l'expression « $x \to \infty$ » n'est qu'une façon de parler commode. En fait on pourrait la préciser en montrant que pour tout espace E localement compact mais non compact, on peut adjoindre à E un point supplémentaire ω appelé point à l'infini de E, et mettre sur l'ensemble $E \cup \{\omega\}$

une topologie, d'ailleurs unique, d'espace compact dont la trace sur E soit la topologie initiale.

Plus généralement on peut se proposer de trouver des espaces compacts $\hat{E}$ dont E soit un sous-espace partout dense; les points de $(\hat{E} \dot{-} E)$ peuvent alors être interprétés comme des points à l'infini de E. Un tel espace $\hat{E}$ réalise ce qu'on appelle une *compactification* de E.

Suivant les besoins de l'analyse ou de la géométrie on s'intéresse à telle ou telle compactification; par exemple la compactification de $\mathbf{R}^n$ utile en géométrie projective est l'espace compact P_n appelé espace projectif de dimension n, qu'on peut identifier à l'ensemble des droites de $\mathbf{R}^{n+1}$ passant par O, muni d'une topologie convenable.

Nous n'étudierons ici que deux exemples simples.

12-8. Compactification de $\mathbf{R}^n$ par un point à l'infini. — L'inversion f de pôle 0 et de puissance 1 dans $\mathbf{R}^{n+1}$, définie par

$$x \longrightarrow \frac{x}{\|x\|^2} = \frac{x}{\Sigma x_i^2}$$

est une homéomorphie de $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ sur lui-même.

Elle transforme l'hyperplan $x_{n+1} = 1$ de $\mathbf{R}^{n+1}$ en $S \dot{-} \{0\}$, où S est la sphère de $\mathbf{R}^{n+1}$ de diamètre (O, A), en appelant A le point (0, 0, ..., 0, 1).

Comme l'application canonique $g : (x_1, x_2, ..., x_n) \longrightarrow (x_1, x_2, ..., x_n, 1)$ de $\mathbf{R}^n$ sur l'hyperplan $x_{n+1} = 1$ de $\mathbf{R}^{n+1}$ est une homéomorphie, la bijection $f \circ g$ de $\mathbf{R}^n$ sur $S \dot{-} \{0\}$ est une homéomorphie. Si l'on identifie par cette homéomorphie les espaces $\mathbf{R}^n$ et $S \dot{-} \{0\}$, la sphère S réalise la compactification cherchée de $\mathbf{R}^n$; son seul point à l'infini est le point 0.

Pour $n = 1$, S est un cercle.

Pour $n = 2$, S est une sphère à 2 dimensions qu'on appelle sphère de Riemann lorsqu'on identifie $\mathbf{R}^2$ à $\mathbf{C}$; elle est fort utile dans l'étude du plan complexe, en partie grâce au fait que l'homéomorphie $f \circ g$ conserve les angles (on dit qu'elle est « conforme »).

12-9. La droite achevée $\overline{\mathbf{R}}$. — Nous venons de compactifier $\mathbf{R}$ par un point à l'infini. Il est commode en Analyse d'utiliser aussi une autre compactification : Nous avons, au § 5, défini la droite achevée $\overline{\mathbf{R}}$, et nous avons montré, au § 7, que $\overline{\mathbf{R}}$ est homéomorphe à $[-1, 1]$ muni de la topologie de l'ordre.

D'autre part, comme $[-1, 1]$ est un intervalle, ses intervalles ouverts sont les traces des intervalles ouverts de $\mathbf{R}$; donc la topologie de l'ordre de $[-1, 1]$ est identique à celle induite par la topologie de $\mathbf{R}$; donc $[-1, 1]$ est compact, et il en est de même de $\overline{\mathbf{R}}$.

En outre, la topologie induite par $\overline{\mathbf{R}}$ sur son sous-espace $\mathbf{R}$ est identique à la topologie initiale de $\mathbf{R}$; donc $\overline{\mathbf{R}}$ constitue bien une compactification de $\mathbf{R}$.

Toute partie X non-vide de $\overline{\mathbf{R}}$ a une borne supérieure et une borne inférieure, puisque c'est vrai dans $[-1, 1]$; lorsque X est fermé, ces bornes appartiennent à X.

Une base de voisinages de $+\infty$ dans $\overline{\mathbf{R}}$ est constituée par les intervalles $[n, +\infty]$ ou $]n, +\infty]$ (où $n \in \mathbf{N}$); énoncé analogue pour $-\infty$.

13. — Connexité

Nous allons essayer de préciser l'idée intuitive qui nous fait dire qu'un ensemble tel que $[0, 1] \cup [2, 3]$ est fait de deux morceaux alors que $[0,1]$ est fait d'un seul morceau.

Il est assez naturel de considérer que deux parties A, B d'un espace topologique E sont nettement séparées dans E lorsqu'elles sont contenues dans deux fermés disjoints de E; cette remarque nous amène à la définition précise suivante :

Définition 13-*1*. — ON DIT QU'UN ESPACE TOPOLOGIQUE E EST *CONNEXE* S'IL N'EXISTE AUCUNE PARTITION DE E EN DEUX PARTIES FERMÉES NON VIDES.

Cette propriété est évidemment (par dualité) équivalente à chacune des suivantes :

13-*2*. — IL N'EXISTE AUCUNE PARTITION DE E EN DEUX PARTIES OUVERTES NON VIDES.

13-*3*. — LES SEULES PARTIES DE E À LA FOIS OUVERTES ET FERMÉES SONT E ET $\emptyset$.

On dit qu'une *partie* A d'un espace E est *connexe* si le sous-espace A de E est connexe.

EXEMPLES. — 1° Nous démontrerons plus tard, lors de l'étude des espaces métriques, que $\mathbf{R}$ (ainsi que tout intervalle de $\mathbf{R}$) est connexe; nous l'admettrons temporairement.

2° Par contre l'ensemble $\mathbf{Q}$ des rationnels n'est pas connexe; plus généralement, montrons que si une partie A de $\mathbf{R}$ n'est pas un intervalle, elle n'est pas connexe; en effet il existe alors deux points distincts $x, y \in A$ tels que $[x, y] \not\subset A$; donc il existe un point $a \in [x, y]$ tel que $a \notin A$. Les ensembles non-vides $A \cap]\leftarrow, a[$ et $A \cap]a, \rightarrow[$ sont ouverts dans A et en constituent une partition; donc A n'est pas connexe.

En résumé les *seules parties connexes de* $\mathbf{R}$ *sont les intervalles*.

THÉORÈME 13-4. — *Soient* X, Y *deux parties complémentaires d'un espace topologique* E, *et soit* A *une partie connexe de* E.

Si A *rencontre* X *et* Y*;* A *rencontre aussi leur frontière.*

DÉMONSTRATION. — $\mathring{X}$, $\mathring{Y}$ et la frontière F de X, Y constituent une partition de E ; si donc A ne rencontre pas F, $\mathring{X} \cap A$ et $\mathring{Y} \cap A$ constituent une partition de A en deux ensembles relativement ouverts non vides. Ceci n'est pas possible puisque A est connexe.

Voici maintenant quelques théorèmes qui permettent souvent de démontrer qu'un ensemble est connexe.

THÉORÈME 13-5. — *Soit* $(A_i)_{i \in I}$ *une famille de parties connexes de* E. *Si l'intersection de cette famille n'est pas vide, sa réunion est connexe.*

DÉMONSTRATION. — Posons $A = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Considérons une partition quelconque de A en deux ouverts O_1 et O_2. Pour tout i, $A_i \cap O_1$ et $A_i \cap O_2$ sont ouverts, relativement à A_i, donc comme A_i est connexe, l'un de ces ensembles est vide. Donc tout A_i est contenu, soit dans O_1, soit dans O_2. Or les A_i ont en commun un point x au moins, qui appartient à O_1, par exemple. Donc O_1 contient tous les A_i et O_2 est vide. Donc A est bien connexe.

EXEMPLE. — Toute partie convexe X de $\mathbf{R}^n$ est connexe; en effet, pour tout $a \in X$, X est réunion de segments contenant a, et chacun de ces segments est connexe puisque homéomorphe à $[0, 1]$.

En particulier $\mathbf{R}^n$, tout pavé ouvert ou fermé de $\mathbf{R}^n$, toute boule ouverte ou fermée de $\mathbf{R}^n$, sont connexes.

THÉORÈME 13-6. — *La fermeture de tout ensemble connexe est connexe.*

DÉMONSTRATION. — Soit A une partie connexe de l'espace E. A toute partition de $\overline{A}$ en deux ensembles O_1 et O_2 ouverts dans $\overline{A}$ correspond la partition de A en les deux ensembles $A \cap O_1$ et $A \cap O_2$ ouverts dans A. Or A étant connexe, l'un de ceux-ci, par exemple $A \cap O_1$, est vide; comme A est partout dense sur $\overline{A}$, l'ensemble O_1 est vide également. Donc A est bien connexe.

Une démonstration analogue montrerait que tout B tel que $A \subset B \subset \overline{A}$ est aussi connexe.

EXEMPLE. — Toutes les sphères de $\mathbf{R}^{n+1}$ sont homéomorphes à la sphère S de $\mathbf{R}^{n+1}$ utilisée au § 12 pour la compactification de $\mathbf{R}^n$; or S est la fermeture d'un sous-espace homéomorphe à $\mathbf{R}^n$; comme $\mathbf{R}^n$ est connexe, S l'est aussi. Donc toute sphère est connexe.

THÉORÈME 13-7. — *Toute image continue d'un espace connexe est connexe.*

DÉMONSTRATION. — Soit f une surjection continue d'un espace connexe E sur F. Pour toute partie X de F à la fois ouverte et fermée, $f^{-1}(X)$ est ouvert et fermé dans E, donc c'est E ou $\emptyset$; or $X = f(f^{-1}(X))$, donc $X = F$ ou $\emptyset$; autrement dit F est connexe.

Définition 13-*8*. — ON APPELLE *CONTINU* TOUT ESPACE COMPACT ET CONNEXE

D'après les théorèmes 11-*16* et 13-*7*, tout espace séparé qui est image continue d'un continu E est un continu.

Lors de l'étude des espaces métriques, nous démontrerons une propriété des continus métriques qui rend plus intuitive la notion de connexité.

EXEMPLES. — 1° L'intervalle $[-1, 1]$ de $\mathbf{R}$ est un continu; il en est donc de même de $\overline{\mathbf{R}}$.

2° Pour toute partie connexe et bornée X de $\mathbf{R}^n$, $\overline{X}$ est connexe et compact, donc est un continu.

Par exemple, le graphe Γ de l'application $x \longrightarrow \sin 1/x$ de $]0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ est une image continue de $]0, 1]$, donc c'est une partie connexe de $\mathbf{R}^2$; sa fermeture, qui est la réunion de Γ et de l'intervalle $0 \times [-1, 1]$ est un continu.

On utilise très souvent ce continu en topologie pour fabriquer des contre-exemples.

Définition 13-*9*. — ON APPELLE *DOMAINE* D'UN ESPACE E TOUTE PARTIE D OUVERTE ET CONNEXE DE E.

PROPOSITION 13-*10*. — *Pour qu'une partie ouverte* D *de* $\mathbf{R}^n$ *soit un domaine, il faut et il suffit que deux points quelconques* p *et* q *de* D *appartiennent à une ligne polygonale de côtés parallèles aux axes et contenue dans* D.

DÉMONSTRATION. — Soit $(a_1, a_2, ..., a_p)$ une suite de points de $\mathbf{R}^n$ telle que chacun des segments $[a_i, a_{i+1}]$ (où $i < p$) soit parallèle à l'un des axes de $\mathbf{R}^n$. Il est immédiat, par récurrence, à partir du théorère 13-5, que la ligne polygonale constituée par la réunion de ces segments est connexe.

Si donc pour tous $p, q \in D$, ces points appartiennent à une telle ligne contenue dans D, en fixant p et en faisant parcourir D par q, on voit que D est la réunion de lignes polygonales contenant p; donc D est connexe.

Inversement, supposons D connexe. Pour tous $x, y \in D$, nous écrirons $x \sim y$ si ces points sont extrémités d'une ligne polygonale du type précédent. Il est immédiat que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence dans D, et que chacune de ses classes est ouverte (car pour tout point y d'un pavé ouvert contenant x et contenu dans D, on a $x \sim y$); il ne peut y avoir qu'une

seule telle classe, puisque sinon D admettrait une partition en deux ensembles ouverts non-vides (par exemple l'une des classes, et la réunion de toutes les autres); autrement dit, pour tous $x, y \in D$, on a $x \sim y$.

EXEMPLE. — Dans $\mathbf{R}^n$, toute boule ouverte, tout pavé ouvert, le complémentaire de toute boule fermée et de tout pavé fermé sont des domaines.

Composantes connexes d'un espace. — Nous pouvons maintenant étudier la structure des espaces qui ne sont pas connexes, en précisant la notion vague de « morceau » d'un tel espace.

Définition 13-*11*. — POUR TOUT POINT x D'UN ESPACE E, ON APPELLE *COMPOSANTE CONNEXE* DE x LA RÉUNION $C(x)$ DES PARTIES CONNEXES DE E QUI CONTIENNENT x.

$C(x)$ est un ensemble connexe d'après le théorème 13-*5* ; d'autre part comme $\overline{C(x)}$ est également connexe et que par construction $C(x)$ est la plus grande partie connexe de E contenant x, on a $C(x) = \overline{C(x)}$, autrement dit $C(x)$ est *fermé*.

La relation binaire sur E définie par « $x_1 \sim x_2$ si x_1 et x_2 appartiennent à une même partie connexe de E » est évidemment une relation d'équivalence. Or pour tout x, $C(x)$ est la classe d'équivalence contenant x. Donc les ensembles $C(x)$ peuvent encore être définis comme classes d'équivalence associées à la relation d'équivalence précédente. C'est pourquoi on les appelle *composantes connexes* de E.

EXEMPLES. — 1° Si E est connexe, il n'y a qu'une seule composante connexe, à savoir E lui-même.

2° Dans l'espace $\mathbf{Q}$, tout sous-ensemble connexe est réduit à un point, donc pour tout $x \in \mathbf{Q}$, $C(x) = \{x\}$.

3° Dans $\mathbf{R} \dot{-} \{0\}$, les composantes connexes sont $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$.

4° Dans $\mathbf{R}^2$, le sous-espace $\mathbf{Q} \times \mathbf{R}$ a pour composantes connexes les droites $x \times \mathbf{R}$ où $x \in \mathbf{Q}$.

5° Dans $\mathbf{R}^2$ le sous-espace constitué par la réunion de l'hyperbole $xy = 1$ et de ses asymptotes a trois composantes connexes.

Espaces localement connexes. — **Définition 13-*12*.** — ON DIT QU'UN ESPACE E EST *LOCALEMENT CONNEXE* AU POINT x DE E SI x A UNE BASE DE VOISINAGES CONNEXES.

ON DIT QUE E EST LOCALEMENT CONNEXE S'IL EST LOCALEMENT CONNEXE EN CHAQUE POINT.

EXEMPLE. — 1° $\mathbf{R}$ et tout intervalle de $\mathbf{R}$ sont localement connexes.

2° Plus généralement toute partie convexe A de $\mathbf{R}^n$ est localement connexe; en effet tout point $x \in A$ a une base de voisinages convexes constituée par les intersections de A avec les pavés ouverts de $\mathbf{R}^n$ contenant x.

3° $\mathbf{Z}$ est localement connexe.

4° Par contre $\mathbf{Q}$ n'est localement connexe en aucun point.

PROPOSITION 13-*13*. — *Dire que* E *est localement connexe équivaut à dire que pour tout ouvert* ω *de* E, *les composantes connexes de* ω *sont ouvertes.*

DÉMONSTRATION. — 1° Soit E localement connexe; soit ω un ouvert de E, et soit C une composante connexe de ω.

Pour tout $x \in C$, il existe un voisinage connexe V de x contenu dans ω; on a évidemment $V \subset C$, donc C est voisinage de x. Comme C est voisinage de chacun de ses points, il est ouvert.

2° Inversement supposons que toute composante connexe de tout ouvert de E soit ouverte. Pour tout $x \in E$, et pour tout voisinage V de x, la composante connexe C de $\overset{\circ}{V}$ qui contient x est ouverte ; donc C est le voisinage connexe de x contenu dans V que nous cherchions.

EXEMPLES. — 1° Comme $\mathbf{R}$ est localement connexe, pour tout fermé $F \subset \mathbf{R}$, les composantes connexes de $\complement F$ sont ouvertes, donc ce sont des intervalles ouverts; chaque extrémité d'un tel intervalle appartient à F.

Comme chacun de ces intervalles contient au moins un nombre rationnel, et qu'ils sont disjoints, ils sont en nombre fini ou infini dénombrable.

2° Le critère fourni par la proposition 13-*13* est souvent commode pour montrer qu'un espace n'est pas localement connexe.

Par exemple considérons le continu $\overline{\Gamma}$ défini dans l'exemple 2 de la définition 13-*8*. Soit ω l'ouvert de $\overline{\Gamma}$ défini par $\omega = \overline{\Gamma} \cap (\mathbf{R} \times]-1/2, 1/2[)$. L'une des composantes connexes de ω est l'intervalle $0 \times]-1/2, 1/2[$, qui n'est pas ouvert dans $\overline{\Gamma}$; donc $\overline{\Gamma}$ n'est pas localement connexe (bien qu'il le soit en tout point de Γ).

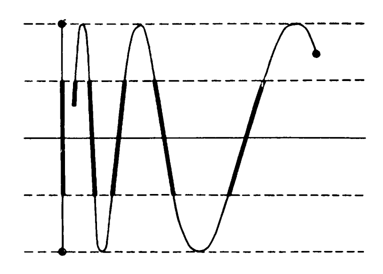


FIG. 2

Connexité par arcs. — Dans de nombreuses branches des mathématiques on n'utilise que des espaces connexes d'un type très régulier; par exemple en géométrie différentielle, les espaces utilisés sont en général localement homéomorphes à $\mathbf{R}^n$ ou à un demi-espace fermé de $\mathbf{R}^n$. Il est commode alors d'utiliser la notion de connexion par arcs :

Définition 13-*14*. — ON DIT QU'UN ESPACE E EST *CONNEXE PAR ARCS* SI POUR TOUS $a, b \in E$, IL EXISTE UNE APPLICATION CONTINUE f D'UN INTERVALLE $[\alpha, \beta]$ DE $\mathbf{R}$ DANS E TELLE QUE $f(\alpha) = a$ ET $f(\beta) = b$.

ON DIT QUE E EST *LOCALEMENT CONNEXE PAR ARCS* SI TOUT POINT DE E A UNE BASE DE VOISINAGES CONNEXES PAR ARCS.

Comme toute image continue d'un intervalle $[\alpha, \beta]$ est connexe, il est évident que tout espace connexe par arc est connexe; mais la réciproque est fausse (on pourra le vérifier sur le continu $\overline{\Gamma}$ de l'exemple 2 ci-dessus).

De même tout espace localement connexe par arcs est localement connexe.

L'expression « connexe par arc » provient de ce que, s'il existe une application continue f d'un intervalle $[\alpha, \beta]$ de $\mathbf{R}$ dans E telle que $f(\alpha) = a$ et $f(\beta) = b$, (où $a \neq b$) il existe aussi dans $f([\alpha, \beta])$ un arc simple d'extrémités a, b. Mais cette dernière propriété (d'ailleurs non évidente) est rarement utilisée à cause du fait suivant :

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ avec $\alpha < \beta < \gamma$; et soit f une application de $[\alpha, \gamma]$ dans E; si les restrictions de f à $[\alpha, \beta]$ et à $[\beta, \gamma]$ sont continues, f est continue. Par contre, si on impose en outre que f soit biunivoque sur $[\alpha, \beta]$ et sur $[\beta, \gamma]$, ceci n'entraîne pas que f le soit sur $[\alpha, \gamma]$. Une définition utilisant la connection par arcs simples manquerait donc de souplesse.

EXEMPLES **13-*15*.** — 1° Tout domaine de $\mathbf{R}^n$ est connexe par arcs et localement connexe par arcs.

2° Il en est de même de toute partie convexe de $\mathbf{R}^n$.

3° Soit E un espace connexe; si E est localement connexe par arcs, il est aussi connexe par arcs (calquer la démonstration sur celle de la proposition 13-*10*).

C'est le cas des variétés localement euclidiennes étudiées en géométrie différentielle.

On vérifiera comme exercices les propriétés suivantes :

4° Toute image continue d'un espace connexe par arcs est connexe par arcs.

5° Pour toute famille (E_i) d'ensembles connexes par arcs dont l'intersection n'est pas vide, la réunion des E_i est connexe par arcs.

6° Le produit d'une famille finie d'espaces connexes par arcs l'est aussi.

14. — Groupes, anneaux et corps topologiques

La notion de groupe topologique est née de l'étude de cas particuliers tels que le groupe additif **R**, ou les groupes de transformations dépendant d'un nombre fini de paramètres, comme le groupe des dilatations de **R** : $x \longrightarrow \lambda x + a$ (où $\lambda \neq 0$). Dans ces divers exemples, l'ensemble étudié est muni à la fois d'une structure de groupe et d'une structure topologique et ces deux structures sont compatibles en ce sens que les opérations du groupe sont continues.

Plus généralement si E est un ensemble muni à la fois d'une structure algébrique définie par plusieurs opérations, et d'une structure topologique, on dit que E est une structure algébrique topologique si les opérations algébriques de E sont continues pour la topologie donnée, en un sens que l'on précise pour chaque espèce de structure.

Groupe topologique. — **Définition 14-*1*.** — UN GROUPE TOPOLOGIQUE G EST UN GROUPE MUNI D'UNE TOPOLOGIE POUR LAQUELLE LES FONCTIONS x^{-1} ET $(x \top y)$ SONT CONTINUES.

Plus précisément on suppose que les applications $x \longrightarrow x^{-1}$ de G dans G et $(x, y) \longrightarrow x \top y$ de $G \times G$ dans G sont continues.

Lorsque ces conditions sont satisfaites, on dit encore que la topologie donnée est *compatible avec la structure de groupe de G.*

EXEMPLE 1 : Le groupe additif **R** muni de la topologie ordinaire est un groupe topologique.

EXEMPLE 2 : Soit **R*** le groupe multiplicatif des nombres réels > 0. La topologie de **R*** induite par celle de **R**, est compatible avec sa structure de groupe.

EXEMPLE 3 : Soit T le groupe quotient de **R** par la relation d'équivalence $x_1 \sim x_2$ si $(x_1 - x_2)$ est un entier; autrement dit (voir chap. II) T est le tore à 1 dimension.

Pour tout $c \in T$, posons $|c| =$ la plus petite des valeurs absolues des représentants de c sur **R**. Si alors on pose, pour tout couple x, y d'éléments de T :

$$d(x, y) = |x - y|,$$

on peut vérifier qu'on définit ainsi sur T une distance (voir § 15), d'ailleurs invariante par les translations de T, et que la topologie associée à cette distance est compatible avec la structure de groupe de T.

Le groupe T muni de cette topologie est le *tore topologique à 1 dimension.* On vérifiera que l'espace topologique T est homéomorphe au cercle S_1.

EXEMPLE 4 : Le groupe multiplicatif des nombres complexes $(a+ib)$ de valeur absolue 1, muni de la topologie induite par celle du plan complexe est un groupe topologique. On démontre qu'il est isomorphe à T.

EXEMPLE 5 : Si l'on identifie le groupe des dilatations de la droite : $x \longrightarrow \lambda x + a$ (où $\lambda \neq 0$) à l'ensemble D des points (λ, a) du plan $\mathbf{R}^2$ d'abscisse non-nulle, et qu'on donne à D la topologie induite par celle de $\mathbf{R}^2$, D devient un groupe topologique.

En effet, si $s = (\lambda, a)$, on a

$$s^{-1} = (\lambda, a)^{-1} = (1/\lambda, -a/\lambda)$$

donc s^{-1} est fonction continue de s sur D; d'autre part si $s = (\lambda, a)$ et $s' = (\lambda', a')$, on a $s \circ s' = (\lambda\lambda', \lambda a' + a)$; donc $s \circ s'$ est bien fonction continue du couple (s, s').

EXEMPLE 6 : Si G est un groupe quelconque, ce groupe, muni de la topologie discrète, devient un groupe topologique. Il va sans dire qu'en général cette topologie n'a pas beaucoup d'intérêt.

CONSÉQUENCES. — 1° La symétrie $x \longrightarrow x^{-1}$ est continue et son inverse lui est identique; c'est donc une homéomorphie de G sur lui-même.

2° Pour tout $a \in G$, la bijection $x \longrightarrow a \cdot x$ est continue ainsi que son inverse $y \longrightarrow a^{-1} \cdot y$.

De même $x \longrightarrow x \cdot a$ est continue ainsi que son inverse. Autrement dit toute translation est une homéomorphie de G sur lui-même. Il en est de même, plus généralement, de toute transformation : $x \longrightarrow axb$.

Ces deux conséquences peuvent se traduire autrement en disant que, pour tout ouvert $\omega \in G$, le symétrique ω^{-1} est ouvert, et tout translaté $a\omega$ ou ωa de ω est aussi ouvert.

Voisinages d'un point. — Du fait que toute translation est une homéomorphie résulte que l'ensemble des voisinages d'un point x_0 se déduit de l'ensemble des voisinages de l'élément neutre e par la translation x_0, à droite ou à gauche. Plus précisément, l'ensemble des voisinages de x_0 est identique à l'ensemble des $x_0 \cdot V$ ou des $V \cdot x_0$, où V parcourt l'ensemble des voisinages de e.

L'étude des voisinages d'un point x_0 de G se ramène donc à celle des voisinages de e.

Voisinages de l'élément neutre. — *1° Pour tout voisinage* V *de* e, *le symétrique* V^{-1} *de* e *est voisinage de* e.

2° Pour tout voisinage V *de* e, *il existe un sous-voisinage* W *de* e *tel que*

$$W.W \subset V.$$

La première propriété résulte de ce que la symétrie est une homéomorphie. Il en résulte, puisque $V \cap V^{-1}$ est identique à son symétrique, que e possède une base de voisinages symétriques.

La seconde propriété traduit simplement le fait que l'application $(x, y) \longrightarrow x \cdot y$ de $G \times G$ sur G est continue au point (e, e) de $G \times G$.

Cette propriété n'est d'ailleurs pas une conséquence du fait que la symétrie et les translations de G sont des homéomorphies. Autrement dit, une topologie sur un groupe G, pour laquelle la symétrie et les translations sont des homéomorphies, ne définit pas nécessairement sur G une structure de groupe topologique.

Pour définir sur un groupe G une topologie compatible avec la structure de groupe de G, on opère souvent de la façon suivante : On se donne une famille $\mathcal{V}(e)$ de parties de G contenant l'élément neutre e (ces ensembles sont destinés à devenir des voisinages de e). Pour tout $x_0 \in G$, on désigne par $\mathcal{V}(x_0)$ la famille $x_0 . \mathcal{V}(e)$ déduite de $\mathcal{V}(e)$ par la translation à gauche x_0.

Puis on appelle ouvert de G toute partie ω de G telle que si $x \in \omega$ il existe un élément de $\mathcal{V}(x)$ contenu dans ω.

Si l'ensemble de ces ω satisfait aux axiomes O_1, O_2, O_3 des espaces topologiques, on a bien défini une topologie sur G; si cette topologie rend xy et x^{-1} continues, elle est compatible avec la structure de G. On dit qu'elle est engendrée par la famille $\mathcal{V}(e)$.

Produit de groupes topologiques. — Soient G_1 et G_2 deux groupes top o logiques. L'ensemble produit $G = G_1 \times G_2$ possède à la fois une structure de groupe-produit et d'espace topologique produit.

On vérifie aisément que la topologie produit sur G est compatible avec la structure de groupe produit sur G; l'ensemble G muni de ces deux structures est appelé produit des groupes topologiques G_1 et G_2.

On définit de même le produit d'un nombre fini quelconque de groupes topologiques.

Exemple 1 : On appelle groupe topologique additif $\mathbf{R}^n$ le produit de n groupes topologiques identiques au groupe topologique additif **R**.

On appelle tore à n dimensions le produit T^n de n groupes égaux au tore topologique T.

Exemple 2 : L'opération $(n, G) \longrightarrow G^n$ est un cas particulier d'un procédé plus général de construction de groupes topologiques :

Soit E un ensemble quelconque et G un groupe topologique; soit G^E l'ensemble de toutes les applications de E dans G. On donne à G^E une structure de groupe en définissant $h = g \cdot f$ par l'égalité $h(x) = g(x) \cdot f(x)$ pour tout $x \in G$.

Pour tout voisinage v de e dans G, appelons V l'ensemble des éléments f de G^E tels que $f(x) \in v$ pour tout $x \in E$. La famille $\mathcal{V}$ des ensembles V engendre sur G^E une topologie, selon un procédé décrit ci-dessus et on vérifie que cette topologie est compatible avec la structure de groupe de G^E.

Exemple 3 : $\mathbf{C}^*$ est isomorphe au produit du groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$ et de T. Son sous-groupe $\mathbf{R}^*$ est isomorphe au produit de $\mathbf{R}_+^*$ et du groupe multiplicatif $\{1, -1\}$.

Isomorphies. Représentations continues. — Soient E et F deux groupes topologiques et f une représentation de E dans F (c'est-à-dire que $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$). On dit que c'est une représentation continue si l'application f est continue sur E.

L'égalité $f(x) = f(x \cdot x_0^{-1}) \cdot f(x_0)$ montre que si une représentation f est continue au point e de E, elle est continue en tout point x_0 de E.

Si f est un isomorphisme algébrique du groupe E sur le groupe F, et si f est une homéomorphie, on dit que les groupes topologiques E et F sont isomorphes.

Exemple 1 : *Isomorphismes du groupe additif* $\mathbf{R}$ *sur lui-même.* — Soit f une représentation continue du groupe additif $\mathbf{R}$ dans lui-même. Posons $f(1) = a$. On en déduit $f(p/q) = a(p/q)$ quels que soient les entiers p et q, où $q \neq 0$; autrement dit $f(x) = a \cdot x$ pour tout nombre rationnel x. Comme les applications f et $x \longrightarrow a \cdot x$ sont continues, cette égalité se prolonge à $\mathbf{R}$ tout entier.

Comme l'application $x \longrightarrow a \cdot x$ est bien une représentation de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, les représentations continues de $\mathbf{R}$ dans lui-même sont les applications $x \longrightarrow ax$. Sauf si $a = 0$ une telle représentation est toujours un isomorphisme.

Remarquons qu'il existe de nombreuses représentations non continues de $\mathbf{R}$ dans lui-même autres que les précédentes; mais leur existence n'est pas évidente; on ne sait en construire qu'en utilisant l'axiome du choix.

Exemple 2 : D'une proposition du chapitre III résulte que le groupe topologique multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$ est isomorphe au groupe topologique additif $\mathbf{R}$. Tout isomorphisme de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$ est par définition un logarithme; l'isomorphisme inverse d'un logarithme est une exponentielle.

Exemple 3 : La méthode de l'exemple 1 s'étend aisément à $\mathbf{R}^n$ et permet de montrer que toute représentation continue de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ est une

application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$; nous avons déjà étudié ces applications linéaires.

EXEMPLE 4 : *Représentations continues de* T *dans lui-même.* — Nous proposons comme exercice de démontrer que toute représentation continue de T dans lui-même est de la forme : $x \longrightarrow n \cdot x$ où n est un entier quelconque. Il en résultera qu'il n'existe que deux automorphismes continus de T : l'identité et la symétrie.

Fonctions périodiques continues sur un groupe topologique. — **Définition 14-2.** — SOIT G UN GROUPE COMMUTATIF NOTÉ ADDITIVEMENT, ET SOIT f UNE APPLICATION DE G DANS UN ENSEMBLE E. ON APPELLE *PÉRIODE* DE f TOUT ÉLÉMENT a DE G TEL QUE $f(x+a) = f(x)$ POUR TOUT $x \in$ G.

Il est immédiat que l'ensemble P des périodes de f constitue un sous-groupe de G, appelé groupe des périodes de f.

On dit que f est *périodique* si son groupe des périodes ne se réduit pas à l'élément O de G.

PROPOSITION **14-3.** — *Le groupe* P *des périodes d'une application continue* f *d'un groupe topologique* G *dans un espace topologique séparé* E *est fermé dans* G.

En effet, pour tout $b \in$ G, désignons par G_b l'ensemble des $a \in$ G tels que $f(b+a) = f(b)$; comme l'application $\varphi_b : a \longrightarrow f(b+a)$ de G dans E est continue, et que $\{f(b)\}$ est fermé dans E, l'ensemble $\varphi_b^{-1}(\{f(b)\}) = G_b$ est fermé. Or par définition

$$P = \bigcap_{b \in G} G_b ;$$

donc P est fermé.

***Sous-groupes fermés de* R.** — Le résultat précédent montre l'intérêt, pour l'étude des fonctions périodiques sur un groupe topologique, d'étudier les sous-groupes fermés de G. Nous ne ferons cette étude que pour le groupe **R**.

PROPOSITION **14-4.** — *Tout sous-groupe fermé de* **R** *est identique, ou bien à* **R**, *ou bien à* $\{0\}$, *ou bien est un groupe discret de la forme* $a \cdot \mathbf{Z}$ *où* $a > 0$.

Soit P un sous-groupe fermé de **R**.

Si 0 est point d'accumulation de P, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ des éléments x de P tels que $x \neq 0$ et $|x| < \varepsilon$; dans tout intervalle de **R** de longueur $> \varepsilon$, il existe au moins un multiple entier d'un tel x; autrement dit P est partout dense sur **R**, et comme il est fermé, on a P $=$ **R**.

Si 0 est un point isolé de P, tout point de P est isolé, donc comme P est fermé, chacun des ensembles $P \cap [-l, l]$ est compact et discret, donc fini.

Donc, ou bien $P = \{0\}$, ou bien l'ensemble des éléments > 0 de P a un plus petit élément, soit a.

Le groupe $a \cdot \mathbf{Z}$ des multiples entiers de a est contenu dans P; si $P \mathbin{\dot{-}} a \cdot \mathbf{Z}$ n'était pas vide, il existerait un $x \in P$ et un entier n tel que $a(n-1) < x < an$; donc pour l'élément $(an-x)$ de P on aurait $0 < (an-x) < a$, ce qui est impossible d'après le choix de a.

On a donc $P = a \cdot \mathbf{Z}$.

Remarque 1. — Si G est un sous-groupe non fermé de $\mathbf{R}$, il est nécessairement partout dense dans $\mathbf{R}$; en effet G est un groupe fermé, distinct de G par hypothèse ; donc G ne peut pas être discret ; ce ne peut donc être que $\mathbf{R}$.

Voici un exemple d'un tel groupe : Le groupe G des éléments $(ap+bq)$, engendré par deux nombres a, b non nuls, de rapport irrationnel.

Remarque 2. — Soit f une fonction périodique continue sur $\mathbf{R}$, et soit P le groupe des périodes de f.

Si $P = \mathbf{R}$, f est constante sur $\mathbf{R}$.

Si $P = a \cdot \mathbf{Z}$, f est connue dès qu'on connaît sa restriction à $[0, a[$ ou à n'importe lequel des intervalles $[x_0, x_0 + a[$ ou encore $]x_0, x_0 + a]$.

La période a est appelée la plus petite période de f.

Structure uniforme. Continuité uniforme. — Dans un groupe topologique G, on peut parler, non seulement de points voisins d'un point donné, mais plus généralement de petitesse d'un ensemble.

En effet, pour tout voisinage V de l'élément neutre e de G et pour tout sous-ensemble A de G, on peut dire que A est *petit d'ordre* V si pour tous $x, y \in A$, on a $xy^{-1} \in V$.

Ce fait fondamental permet d'introduire la notion de continuité uniforme d'une fonction, notion que nous retrouverons sous une forme voisine dans l'étude des espaces métriques.

Définition 14-5. — Soient X et Y deux groupes topologiques que nous supposerons commutatifs pour simplifier, et f une application de X dans Y. On dit que f est *uniformément continue* si pour tout voisinage W du zéro de Y, il existe un voisinage V du zéro de X tel que tout $A \subset X$ qui est petit d'ordre V ait une image $f(A)$ petite d'ordre W.

On peut encore exprimer cette condition en disant que

$$((x_1 - x_2) \in V) \Longrightarrow \Big((f(x_1) - f(x_2)) \in W\Big).$$

Exemples. — Soit G un groupe topologique commutatif, et soit V un voisinage symétrique quelconque de O dans G.

1° La relation $-(a+\mathrm{V}) = -a-\mathrm{V} = -a+\mathrm{V}$ montre que le symétrique de tout ensemble petit d'ordre V est petit d'ordre V; donc l'application $x \longrightarrow -x$ de G dans G est uniformément continue.

2° La continuité de l'application $f : (x, y) \longrightarrow (x+y)$ de $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ dans G au point (O, O) entraîne l'existence d'un voisinage W de O dans G tel que $\mathrm{W}+\mathrm{W} \subset \mathrm{V}$.

Or pour tous $a, b \in \mathrm{G}$, l'ensemble des $(x+y)$ de G tels que $x \in (a+\mathrm{W})$ et $y \in (b+\mathrm{W})$ est contenu dans $(a+b)+\mathrm{V}$, donc est petit d'ordre V.

Donc l'application f est uniformément continue.

Z La topologie du groupe multiplicatif **R*** est la trace sur **R*** de la topologie du groupe additif **R**, donc les fonctions continues définies sur le groupe topologique **R*** ou à valeurs dans ce groupe sont les mêmes que les fonctions continues définies sur le sous-espace **R*** de **R** ou à valeurs dans ce sous-espace; par exemple x^{-1} et xy sont continues sur **R*** pour la topologie de **R**. Mais la situation change totalement lorsqu'il s'agit de continuité uniforme.

Par exemple l'application identique $x \longrightarrow x$ du groupe multiplicatif **R*** dans le groupe additif **R** n'est pas uniformément continue; en effet, pour tout voisinage W de l'élément neutre de **R***, les translatés de W sont les ensembles $\lambda\mathrm{W}$ et il n'existe évidemment aucun voisinage V de O dans **R** tel que tous ces $\lambda\mathrm{W}$ soient petits d'ordre V.

De même l'application $x \longrightarrow x^{-1}$ de **R*** dans **R** n'est pas uniformément continue, que l'on mette sur **R*** la structure uniforme associée à sa structure de groupe, ou même la structure uniforme induite par celle de **R**; ces conclusions s'étendent à l'application $(x, y) \longrightarrow xy$.

Anneaux topologiques. — **Définition 14-6.** — UN ANNEAU TOPOLOGIQUE A EST UN ANNEAU MUNI D'UNE TOPOLOGIE POUR LAQUELLE LES FONCTIONS $(-x)$, $(x+y)$ ET $x \cdot y$ SONT CONTINUES.

Plus précisément, on suppose que l'application $x \longrightarrow -x$ de G sur G et les applications $(x, y) \longrightarrow x+y$ et $x \cdot y$ de $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ dans G sont continues.

Lorsque ces conditions sont satisfaites, on dit que la topologie sur A est compatible avec la structure d'anneau de A.

En particulier, pour tout anneau topologique A, la topologie de A est compatible avec la structure de groupe additif de A.

Exemples d'anneaux topologiques. — 1° Pour tout anneau A, si on munit A de la topologie discrète, on obtient un anneau topologique, d'ailleurs en général sans intérêt.

2° Soit A un anneau sur lequel est définie une fonction φ à valeurs réelles positives, et telle que :

$$\varphi(O) = 0, \quad \varphi(x) > 0 \quad \text{si } x \neq O$$
$$\varphi(-x) = \varphi(x); \quad \varphi(x+y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{et } \varphi(x \cdot y) \leqslant \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

Pour tous x et $y \in$ A, on pose $d(x, y) = \varphi(x-y)$. Il est immédiat que d est une distance sur A. On vérifie ensuite que la topologie sur A associée à cette distance (voir §§ 15, 16) est compatible avec la structure d'anneau de A.

Cas particuliers. — *a*) A est l'anneau **R** des nombres réels avec

$$\varphi(x) = |x|;$$

b) A est l'anneau des fonctions continues réelles définies sur [0, 1] avec $\varphi(f) = \sup |f(x)|$;

c) A est l'anneau des matrices carrées d'ordre n à éléments complexes; si les a_i^j sont les éléments d'une matrice $m \in$ A, on prend

$$\varphi(m) = \sum_{i,j} |a_i^j|$$

d) Soit A l'anneau des polynômes à une variable et à coefficients complexes. On prend sur A la topologie pour laquelle le zéro de A a pour base de voisinages les ensembles V (ε, n), $(\varepsilon > 0,\ n$ entier $\geqslant 0)$, où V (ε, n) désigne l'ensemble des polynômes $a_0 + a_1 x + \ldots$ tels que $|a_i| \leqslant \varepsilon$ pour tout $i \leqslant n$.

Corps topologiques. — **Définition 14-7.** — UN CORPS TOPOLOGIQUE K EST UN CORPS MUNI D'UNE TOPOLOGIE COMPATIBLE AVEC LA STRUCTURE D'ANNEAU DE K, ET TELLE QUE L'APPLICATION $x \longrightarrow x^{-1}$ DE K* DANS K SOIT CONTINUE (OÙ K* DÉSIGNE L'ENSEMBLE DES ÉLÉMENTS DE K DIFFÉRENTS DE 0).

Lorsqu'une topologie sur un corps K satisfait à ces conditions, on dit qu'elle est compatible avec la structure de corps de A.

EXEMPLES DE CORPS TOPOLOGIQUE. — 1° Le corps **R** des nombres réels muni de la topologie **R**.

2° Le sous-corps **Q** des nombres rationnels de **R**.

3° Le corps **C** des nombres complexes, muni de la topologie obtenue en transportant à **C** la topologie de $\mathbf{R}^2$ par la correspondance

$$(a + ib) \longrightarrow (a, b).$$

Le fait que cette topologie est compatible avec la structure de corps de **C** résulte des propriétés de la valeur absolue :

$$|-z| = |z|, \quad |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Aussi allons-nous donner un énoncé plus général :

4° Soit K un corps et $|x|$ une fonction à valeurs réelles positives définies sur K, non $\equiv$ 0 et non $\equiv$ 1, et possédant les propriétés suivantes :

$$|-x| = |x|, \quad |x+y| \leqslant |x| + |y|, \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

Il résulte aisément de ces propriétés que $|e| = 1$, que $|x| \neq 0$ pour $x \neq O$ et que $|O| = 0$.

On dit qu'une telle fonction est une *valeur absolue* sur K. On lui associe une distance sur K en posant $d(x, y) = |x - y|$.

Un calcul élémentaire montre que la topologie associée à cette distance est compatible avec la structure de corps de K.

Lorsque K est le corps **C**, la topologie associée à la valeur absolue est identique à la topologie définie dans l'exemple 3 ci-dessus.

Le corps des quaternions est un autre exemple de corps muni d'une valeur absolue définie par

$$|a + bi + cj + dk| = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}$$

Espaces vectoriels topologiques. — Nous étudierons dans un autre chapitre les espaces vectoriels normés, qui constituent un exemple important d'espaces vectoriels topologiques.

III. — ESPACES MÉTRIQUES

Dans un espace topologique, la notion de voisinage permet de préciser autour de chaque point l'ordre de petitesse d'un ensemble; les notions de convergence et de continuité en résultent.

Dans un groupe topologique, les translations permettent de faire mieux : Préciser l'ordre de petitesse d'un ensemble en le comparant, par translation, aux voisinages de l'élément neutre; on peut alors parler de continuité uniforme d'une fonction.

Nous allons retrouver une possibilité analogue dans les espaces métriques, dont la définition générale a été donnée par M. Fréchet; toutefois dans ces espaces la proximité de deux points n'est plus définie par référence à un voisinage d'un point particulier de l'espace, mais par un nombre dépendant de ces deux points.

15. — Distances et écarts

Définition 15-*1*. — ON APPELLE *ESPACE MÉTRIQUE* TOUT COUPLE CONSTITUÉ PAR UN ENSEMBLE E ET UNE APPLICATION $(x, y) \longrightarrow d(x, y)$ DE $E \times E$ DANS $\mathbf{R}_+$, POSSÉDANT LES PROPRIÉTÉS SUIVANTES :

$M_1 : (x = y) \Longleftrightarrow (d(x, y) = 0)$;

$M_2 : d(x, y) = d(y, x)$ (SYMÉTRIE);
$M_3 : d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (INÉGALITÉ TRIANGULAIRE).

LA FONCTION d S'APPELLE UNE *DISTANCE* ET $d(x, y)$ S'APPELLE LA DISTANCE DES POINTS x, y.

EXEMPLES. — 1° Dans $\mathbf{R}$, l'application $(x, y) \longrightarrow |x - y|$ est la distance usuelle.

2° Plus généralement, soit G un groupe commutatif et soit $x \longrightarrow p(x)$ une application de G dans $\mathbf{R}_+$ telle que :

$$(p(x) = 0) \Longleftrightarrow (x = 0); \quad p(-x) = p(x); \quad p(x+y) \leqslant p(x) + p(y).$$

Si l'on pose, pour tous $x, y \in G$, $d(x, y) = p(x - y)$, il est immédiat que d vérifie les axiomes M_1, M_2; d'autre part la relation

$$(x-y) = (x-z) + (z-y) \text{ entraîne } p(x-y) \leqslant p(x-z) + p(z-y),$$

ou encore

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y).$$

Donc d est bien une distance sur G.

3° Soit E un ensemble quelconque, et posons

$$d(x, y) = 0 \text{ si } x = y; \quad d(x, y) = 1 \text{ si } x \neq y.$$

Il est immédiat que d est une distance sur E; il est parfois commode de l'utiliser pour la construction de contre-exemples.

Z Notons qu'une distance d sur un ensemble E est une fonction définie, non pas sur E, mais sur E^2; il faut s'en souvenir quand on étudie les propriétés de la distance.

Ecart sur un ensemble. — Il est souvent commode, ne serait-ce que pour étudier les distances, d'utiliser la notion d'écart, moins restrictive que celle de distance.

Définition 15-2. — ON APPELLE *ÉCART* SUR UN ENSEMBLE E TOUTE APPLICATION f DE $E \times E$ DANS $\overline{\mathbf{R}}_+$ TELLE QUE :

$E_1 : (x = y) \Longrightarrow (f(x, y) = 0)$;
$E_2 : f(x, y) = f(y, x)$;
$E_3 : f(x, y) \leqslant f(x, z) + f(z, y)$.

La seule différence avec la notion de distance est donc que f peut prendre la valeur $+\infty$, et que deux points distincts peuvent avoir un écart nul. Donc pour voir si un écart f est une distance, il suffit de vérifier que tout $f(x, y)$ est fini et que

$$(x \neq y) \Longrightarrow (f(x, y) \neq 0).$$

EXEMPLE. — Soit α une application de E dans $\mathbf{R}$; la fonction f définie par
$$f(x, y) = |\alpha(x) - \alpha(y)|$$
est un écart.

Par exemple si E est l'ensemble des fonctions numériques sur [0, 1] et si $a \in [0, 1]$, la fonction f_a définie par
$$f_a(x, y) = |x(a) - y(a)|$$
est un écart sur E.

Opérations sur les écarts. — L'intérêt des écarts est la grande généralité des opérations qui conservent leurs propriétés; cette souplesse rend très commode leur usage.

1° La somme de toute famille d'écarts est un écart.

En particulier toute somme finie de distances est une distance.

2° Toute limite d'écarts est un écart.

3° Toute enveloppe supérieure d'écarts est un écart.

En effet, soit $f(x, y) = \sup f_i(x, y)$, où les f_i sont des écarts. L'application f de E^2 dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ vérifie évidemment les axiomes E_1, E_2; d'autre part on a pour tout i :
$$f_i(x, y) \leqslant f_i(x, z) + f_i(z, y) \leqslant f(x, z) + f(z, y),$$
d'où
$$f(x, y) \leqslant f(x, z) + f(z, y).$$

Donc f est bien un écart. En particulier, si les f_i sont en nombre fini et sont des distances, f est une distance.

4° Soit α une application d'un ensemble E dans un ensemble F muni d'un écart f. Pour tous $x, y \in E$, posons
$$e(x, y) = f(\alpha(x), \alpha(y)).$$

Il est immédiat que e est un écart sur E; on l'appelle l'image réciproque de f par l'application α.

5° Nous dirons qu'une application φ de $\overline{\mathbf{R}}_+$ dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ est une *jauge* si elle est croissante et si
$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x+y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{(sous-additivité).}$$

On vérifiera que la famille des jauges est invariante par les opérations suivantes : addition, passage à la limite simple, enveloppe supérieure, composition : $(\varphi_1, \varphi_2) \longrightarrow \varphi_1(\varphi_2)$.

Toute φ croissante et concave telle que $\varphi(0) = 0$ est une jauge; en effet la concavité de φ entraîne :
$$\varphi(u+v) - \varphi(0+v) \leqslant \varphi(u) - \varphi(0) \quad \text{d'où} \quad \varphi(u+v) \leqslant \varphi(u) + \varphi(v).$$

En particulier les fonctions $x/(1+x)$ et $\inf(x, 1)$ sont des jauges.

Pour toute jauge φ et tout écart f sur un ensemble E, $\varphi(f)$ est aussi un écart sur E : Les propriétés E_1, E_2 sont évidentes; d'autre part, pour tous $x, y, z \in E$, posons :

$$a = f(x,y); \quad b = f(x,z); \quad c = f(y,z).$$

La relation $a \leqslant b+c$ entraîne $\varphi(a) \leqslant \varphi(b+c) \leqslant \varphi(b) + \varphi(c)$.

La relation $\varphi(a) \leqslant \varphi(b) + \varphi(c)$ démontre la propriété E_3.

6° Plus généralement on peut définir des jauges sur $(\overline{\mathbf{R}}_+)^n$: Ordonnons cet ensemble en posant $x \leqslant y$ si pour tout i, on a $x_i \leqslant y_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$); et définissons $z = x+y$ par $z_i = x_i + y_i$ pour tout i.

On appelle alors *jauge* sur $(\overline{\mathbf{R}}_+)^n$ toute application φ de cet ensemble dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ qui soit croissante et telle que

$$\varphi(0) = 0 \text{ et } \varphi(x+y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y).$$

Toute φ croissante, convexe et positivement homogène de degré 1 dans $\mathbf{R}_+^n$ est une telle jauge; en effet, la convexité donne
$\varphi((x+y)/2) \leqslant \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(y))$ d'où $\varphi(x+y) = 2\varphi((x+y)/2) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$.

Par exemple, si (x_i) sont les coordonnées de x, la fonction

$$x \longrightarrow (\Sigma x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

possède ces propriétés, donc est une jauge; il en est de même plus généralement de

$$(\Sigma |x_i|^p)^{1/p} \quad (p \geqslant 1).$$

Les jauges sur $(\overline{\mathbf{R}}_+)^n$ permettent de fabriquer commodément des écarts : En effet, si $f_1, \ldots, f_n$ sont des écarts sur un ensemble E, et si φ est une jauge sur $(\overline{\mathbf{R}}_+)^n$, on vérifie comme pour $n = 1$, que $\varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est un écart sur E.

Par exemple $(\Sigma f_i^2)^{\frac{1}{2}}$ est un écart.

Application des opérations sur les écarts. — 1° **Distances classiques dans $\mathbf{R}^n$.** — Désignons par (x_i) les coordonnées d'un point x de $\mathbf{R}^n$. Pour tout i, posons

$$d_i(x,y) = |x_i - y_i|;$$

c'est l'image réciproque de la distance de $\mathbf{R}$ par l'application $x \longrightarrow x_i$; donc c'est un écart sur $\mathbf{R}^n$.

D'après ce qui précède, les fonctions

$$d(x,y) = \Big(\sum_i (x_i - y_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}}; \quad d'(x,y) = \sup_i |x_i - y_i|; \quad d''(x,y) = \sum_i |x_i - y_i|$$

sont des écarts sur $\mathbf{R}^n$; comme elles sont finies et qu'elles ne sont nulles que pour $x = y$, ce sont des distances sur $\mathbf{R}^n$; chacune d'elles est invariante par les translations de $\mathbf{R}^n$.

On vérifiera que le rapport de deux quelconques de ces distances est borné, et que plus précisément on a :

$$d' \leqslant d \leqslant d'' \leqslant n\,d'$$

2° **Produit d'espaces métriques.** — Soit (E_i) une famille finie d'espaces métriques munis des distances d_i.

Sur le produit E des E_i, chacune des fonctions $(x, y) \longrightarrow d_i(x_i, y_i)$ est un écart; donc, comme dans l'exemple ci-dessus, les fonctions

$$d(x, y) = (\sum_i d_i^2(x_i, y_i))^{\frac{1}{2}}; \quad d'(x, y) = \sup_i d_i(x_i, y_i); \quad d''(x, y) = \sum_i d_i(x_i, y_i)$$

sont des écarts sur E; il est immédiat que ce sont des distances, et qu'elles sont comparables en ce sens que :

$$d' \leqslant d \leqslant d'' \leqslant n\, d'$$

(où n est le nombre des E_i).

Suivant les cas on utilise l'une ou l'autre de ces distances; la première, d, ne s'impose que lorsque les espaces E_i sont des espaces vectoriels et que les distances d_i sont déduites d'un produit scalaire; on l'appelle la distance cartésienne ou euclidienne; l'espace $\mathbf{R}^n$ muni de cette distance s'appelle l'*espace euclidien* de dimension n.

3° Soit E un espace métrique et soit d sa distance.

Les fonctions $d' = d/(1+d)$ et $d'' = \inf(d, 1)$ sont des distances sur E.

On a $d' \leqslant d'' \leqslant 2\, d'$, donc ces distances sont comparables. Nous verrons qu'elles donnent à E même topologie et même « structure uniforme » que d, avec l'avantage souvent appréciable qu'elles sont $\leqslant 1$.

4° Soit E l'ensemble des applications d'un ensemble A dans un espace métrique B muni de la distance d.

Nous savons que, pour tout $a \in A$, $d\big(x(a), y(a)\big)$ est un écart sur E; cet écart mesure la proximité des fonctions x, y au point a.

Plus généralement posons, pour tout $X \subset A$:

$$d_X(x, y) = \sup_{a \in X} d\big(x(a), y(a)\big).$$

C'est un écart sur E, qui mesure la proximité des fonctions x, y sur X; en particulier d_A est un écart sur E qui ne s'annule que pour $x = y$; si donc en plus $d \leqslant 1$, on a aussi $d_A \leqslant 1$, donc d_A est une distance.

Nous utiliserons ces écarts lors de l'étude de la convergence uniforme.

La plupart des notions que nous allons maintenant introduire s'étendent de façon évidente aux ensembles munis d'un écart; nous ne le ferons explicitement que lorsque ce sera utile.

Sous-espace métrique d'un espace métrique. — **Définition 15-3.** — SOIT E UN ESPACE MÉTRIQUE DÉFINI PAR UNE DISTANCE d, ET SOIT A UNE PARTIE DE E. ON APPELLE SOUS-ESPACE MÉTRIQUE A DE E L'ENSEMBLE A MUNI DE LA DISTANCE d_A DÉFINIE PAR $d_A(x, y) = d(x, y)$ POUR x ET $y \in A$.

Autrement dit, d_A est la restriction de d à la partie A^2 de E^2. Cette définition nous fournit des exemples étendus d'espaces métriques : par exemple

tout sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ devient un sous-espace métrique de $\mathbf{R}^n$ lorsque $\mathbf{R}^n$ est muni d'une des distances définies ci-dessus.

Isométries. — **Définition 15-4.** — SOIENT E, E' DEUX ESPACES MÉTRIQUES MUNIS DES DISTANCES d ET d' ; SOIT $f : x \longrightarrow x'$ UNE BIJECTION DE E SUR E'.

ON DIT QUE f EST UNE ISOMÉTRIE SI POUR TOUS $x, y \in$ E ON A

$$d(x, y) = d'(x', y').$$

Une isométrie n'est donc pas autre chose qu'un isomorphisme pour les structures d'espace métrique.

EXEMPLES. — 1° Dans un groupe commutatif muni d'une distance d de la forme $d(x, y) = p(x-y)$, la symétrie et toute translation sont des isométries.

2° Dans l'espace $\mathbf{R}^n$ muni d'une de ses distances classiques, toute droite est un sous-espace isométrique à la droite numérique $\mathbf{R}$.

3° On démontre que les isométries de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ sur lui-même qui conservent l'origine ne sont autres que les transformations linéaires de $\mathbf{R}^n$ qui conservent la forme quadratique Σx_i^2.

Boules ouvertes ou fermées. Sphère. — **Définition 15-5.** — DANS TOUT ESPACE MÉTRIQUE E, ON APPELLE *BOULE OUVERTE* (RESP. FERMÉE) DE CENTRE a ET DE RAYON ρ ($\rho \geqslant 0$ OU $+\infty$ ET $a \in$ E) L'ENSEMBLE $B(a, \rho)$ DES POINTS x DE E TELS QUE $d(a, x) < \rho$ (RESP. $\leqslant \rho$).

LORSQUE E EST LE PLAN EUCLIDIEN $\mathbf{R}^2$ ON REMPLACE SOUVENT LE MOT BOULE PAR LE MOT *DISQUE*.

ON APPELLE *SPHÈRE* DE CENTRE a ET DE RAYON $\rho \geqslant 0$ L'ENSEMBLE $S(a, \rho)$ DES POINTS DE E TELS QUE $d(a, x) = \rho$.

LORSQUE E EST LE PLAN EUCLIDIEN $\mathbf{R}^2$ ON REMPLACE SOUVENT LE MOT SPHÈRE PAR LE MOT *CERCLE* OU CIRCONFÉRENCE.

EXEMPLE. — Dans $\mathbf{R}^n$ muni de la distance $d'(x, y) = \sup |x_i - y_i|$, la boule $B(a, \rho)$ est un cube de côtés parallèles aux axes.

Il est immédiat que toute réunion de boules ouvertes de centre a en est encore une; de même toute intersection de boules fermées de centre a en est encore une.

Il faut remarquer ici que les boules et sphères d'un espace E n'ont en général aucune des propriétés géométriques des boules et sphères de $\mathbf{R}^n$. On peut s'en convaincre en prenant pour E un sous-espace métrique quelconque de $\mathbf{R}^n$.

Diamètre. Distance de deux ensembles. — **Définition 15-6.** — ON APPELLE *DIAMÈTRE* D'UNE PARTIE A D'UN ESPACE MÉTRIQUE E, LA BORNE SUPÉRIEURE $\delta(A)$ DES DISTANCES $d(x, y)$, OÙ x ET $y \in$ A.

ON DIT QUE A EST *BORNÉ* LORSQUE SON DIAMÈTRE EST FINI.

POUR TOUTE APPLICATION f D'UN ENSEMBLE X DANS UN ESPACE MÉTRIQUE E, ON APPELLE *OSCILLATION* DE f SUR UNE PARTIE Y DE X LE DIAMÈTRE DE $f(Y)$.

EXEMPLES. — 1° Le diamètre d'un triangle plan est égal à la longueur du plus grand de ses côtés.

2° Le diamètre d'une boule de $\mathbf{R}^n$ de rayon ρ est égal à 2ρ; par contre, dans tout espace métrique de diamètre ρ_0, le diamètre de toute boule de rayon $\rho > \rho_0$ est égal à ρ_0.

Il est immédiat que les parties bornées d'un espace métrique ne sont autres que les sous-ensembles de boules de rayon fini; que la réunion de deux ensembles bornés est bornée; et que

$$(A \cap B \neq \emptyset) \Longrightarrow (\delta(A \cup B) \leqslant \delta(A) + \delta(B)).$$

Définition 15-*7*. — SOIENT A, B DEUX PARTIES D'UN ESPACE MÉTRIQUE E MUNI DE LA DISTANCE d. ON APPELLE *DISTANCE* DE A ET B LA BORNE INFÉRIEURE $d(A, B)$ DES DISTANCES $d(x, y)$, OÙ $x \in A$ ET $y \in B$.

EN PARTICULIER, POUR TOUT $x \in E$, ON APPELLE DISTANCE DE x À B, LE NOMBRE $d(x, B) = d(\{x\}, B) = \inf_{y \in B} d(x, y)$.

EXEMPLES. — 1° Dans le plan euclidien la distance d'un point à une droite D est égale à la distance de ce point à sa projection sur D.

2° Dans $\mathbf{R}$, la distance de $\mathbf{Q}$ à $\complement \mathbf{Q}$ est nulle.

3° La distance d'une branche d'hyperbole à l'une de ses asymptotes est nulle.

Z Malgré son nom, $d(A, B)$ ne constitue pas une distance, ni même un écart, dans l'ensemble des parties de E, car l'inégalité triangulaire n'est nullement vérifiée : Par exemple, si

$$A = [0, 1], \qquad B = [1, 2], \qquad C = [2, 3],$$

on a

$$d(A, B) = d(B, C) = 0,$$

tandis que

$$d(A, C) = 1.$$

16. — Topologie d'un espace métrique

Parmi toutes les topologies que l'on peut définir sur un ensemble E muni d'une structure d'espace métrique, il y en a une qui est directement liée à la distance et qu'on appelle topologie de l'espace métrique E.

Définition 16-*1*. — DANS UN ESPACE MÉTRIQUE E ON DIT QU'UN SOUS-ENSEMBLE A DE E EST OUVERT S'IL EST VIDE OU SI POUR TOUT $x \in A$ IL EXISTE UNE BOULE OUVERTE DE CENTRE x ET DE RAYON NON NUL CONTENUE DANS A.

Il est immédiat que l'ensemble des ouverts de E satisfait aux axiomes O_1, O_2, O_3 des espaces topologiques; c'est la topologie définie sur E par ces ouverts qu'on appelle topologie de l'espace métrique E.

Toute boule ouverte $B(a, \rho)$ est un ouvert : C'est évident si $\rho = 0$. Sinon, soit $x \in B(a, \rho)$; la boule ouverte $B\big(x, (\rho - d(a, x))\big)$ est contenue dans $B(a, \rho)$, car

$$d(x, y) < \rho - d(a, x) \text{ entraîne } d(a, y) \leqslant d(a, x) + d(x, y) < \rho .$$

Il en résulte que toute réunion de boules ouvertes est un ouvert. Inversement, la définition d'un ouvert entraîne que tout ouvert est réunion de boules ouvertes. Il y a donc identité entre les ouverts de E et les réunions de boules ouvertes.

PROPOSITION **16**-*2*. — *La topologie de tout espace métrique est séparée.*

En effet, si x et y sont des points distincts de E, les boules ouvertes $B(x, \rho)$ et $B(y, \rho)$ où $\rho \leqslant d(x, y)/2$ constituent deux voisinages disjoints de x, y.

COROLLAIRE. — *Une suite de points d'un espace métrique* E *(ou plus généralement une base de filtre de* E*) peut avoir au plus un point limite.*

Z Notons que la topologie sur un ensemble E que l'on peut associer à un écart d sur E par une définition analogue à la définition 16-*1* est aussi séparée si la condition

$$\big(d(x, y) = 0\big) \Longrightarrow (x = y)$$

est satisfaite.

Plus généralement, pour tout écart, on peut séparer deux points distincts x, y tels que $d(x, y) \neq 0$; par contre si $d(x, y) = 0$, tout voisinage de x contient y, et inversement.

PROPOSITION **16**-*3*. — *Tout point d'un espace métrique a une base dénombrable de voisinages.*

Plus précisément, pour toute suite (ρ_n) de nombres > 0 tendant vers 0, les boules $B(a, \rho_n)$ ouvertes ou fermées, constituent une base de voisinages de a. En effet tout ouvert contenant a contient une boule $B(a, \rho)$ où $\rho > 0$, donc contient aussi une boule $B(a, \rho_n)$; d'autre part, toute $B(a, \rho_n)$ est effectivement un voisinage de a.

Voici quelques conséquences de cette propriété :

PROPOSITION **16**-*4*. — *Soit* E *un espace métrique et soit* A *une partie de* E. $(a \in \overline{A}) \Longleftrightarrow \big(d(a, A) = 0\big) \Longleftrightarrow$ *(il existe une suite* (x_n) *de points de* A *qui converge vers* a*).*

Chacune des relations $a \in \overline{A}$ et $d(a, A) = 0$ équivaut à dire que $A \cap B(a, 1/n)$ n'est vide pour aucun n; elles sont donc équivalentes. Elles entraînent que pour tout entier n, il existe un point x_n de A dans $B(a, 1/n)$. La suite (x_n) converge évidemment vers a.

La réciproque est vraie dans tout espace topologique.

PROPOSITION 16-5. — *Soit* E *un espace métrique et soit* (x_n) *une suite de points de* E.

(a *est une valeur d'adhérence de la suite* (x_n)) $\Longleftrightarrow$ (*il existe une suite partielle* (x_{n_i}) *qui converge vers* a).

La démonstration est tout à fait analogue à la précédente.

Voici maintenant un énoncé fort utile :

PROPOSITION 16-6. — *Soient* E *un espace métrique,* A *une partie de* E, *et* f *une application de* A *dans un espace topologique* F.

Pour tous $a \in \overline{A}$ *et* $b \in F$, *les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1° Pour toute suite (x_n) *de points de* A *qui tend vers* a, $\lim f(x_n) = b$;

2° $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

DÉMONSTRATION. — Montrons que (1) $\Longrightarrow$ (2).

En effet si $f(x)$ ne converge pas vers b lorsque x tend vers a, il existe un voisinage V de b tel que, pour tout voisinage v de a dans A, on ait $f(v) \not\subset V$; en particulier il existe alors un point $x_n \in A \cap B(a, 1/n)$ tel que $f(x_n) \notin V$; la suite (x_n) converge vers a tandis que $f(x_n)$ ne converge pas vers b. Ceci est exclu par hypothèse.

La réciproque (2) $\Longrightarrow$ (1) est vraie dans tout espace topologique.

COROLLAIRE 16-7. — *Dire qu'une application* f *de* E *métrique dans* F *topologique est continue au point* a *équivaut à dire que pour toute suite* (x_n) *de points de* E *qui converge vers* a, *la suite* $(f(x_n))$ *converge vers* $f(a)$.

C'est un cas particulier de la proposition précédente.

COROLLAIRE 16-8. — *Dire qu'une application* f *de* E *métrique dans* F *topologique est continue dans* E, *équivaut à dire que la restriction de* f *à tout compact de* E *est continue.*

Dans un sens, c'est évident. Inversement supposons que la restriction de f à tout compact soit continue; pour tout $a \in E$ et pour toute suite (x_n) qui tend vers a, l'ensemble $\{a, x_1, x_2, ...\}$ est compact, donc $f(x_n)$ tend vers $f(a)$. D'après le corollaire précédent, f est continue.

Oscillation d'une fonction en un point. — **Définition 16-9.** — SOIT f UNE APPLICATION DE E TOPOLOGIQUE DANS F MÉTRIQUE. POUR TOUT $a \in E$, ON

APPELLE *OSCILLATION DE f EN a* L'ÉLÉMENT DE $\overline{\mathbf{R}_+}$ ÉGAL À LA BORNE INFÉRIEURE DE L'OSCILLATION DE f SUR LES VOISINAGES V DE a; AUTREMENT DIT C'EST INF. $\delta\big(f(\mathrm{V})\big)$, OÙ V PARCOURT $\mathscr{V}_a$.

On vérifiera par exemple que la nullité de cette oscillation équivaut à la continuité de f en a.

On définirait de façon analogue l'oscillation de f en a sur une partie A de E telle que $a \in \overline{\mathrm{A}}$.

Relation entre la métrique et la topologie. — Nous avons associé une topologie à toute distance sur un ensemble. Il est quelquefois commode d'utiliser cette distance pour étudier les propriétés topologiques de E ; par exemple, le fait que pour tout point x de E les boules de centre x constituent une base de voisinages de x entraîne les équivalences suivantes :

Pour toute suite (x_n) de points de E,

$$(\lim x_n = a) \iff \big(\lim d(a, x_n) = 0\big).$$

Pour toute application f de E dans F métrique, la continuité de f au point a équivaut à la condition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \big(d(a, x) < \eta\big) \Longrightarrow \Big(d\big(f(a), f(x)\big) < \varepsilon\Big).$$

Toutefois un abus de l'usage de la métrique alourdit souvent les démonstrations et cache les véritables causes des phénomènes.

Ceci provient en partie du fait qu'à de nombreuses distances différentes sur un ensemble E peut être associée une même topologie; ces distances ne constituent donc pas un outil intrinsèque pour l'étude de cette topologie.

Une autre raison qui conduit à limiter l'usage des distances est que certains espaces topologiques fort utiles dans l'étude de questions du type le plus classique ne sont pas *métrisables,* c'est-à-dire ne peuvent pas être définis à partir d'une distance.

Nous allons préciser par quelques énoncés les rapports entre la métrique et la topologie.

PROPOSITION 16-*10*. — *Soient d, d' deux distances sur un ensemble* E.

Si elles tendent vers 0 *simultanément (en ce sens que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\big(d(x, y) < \eta\big)$ entraîne $\big(d'(x, y) < \varepsilon\big)$, et vice-versa), les topologies associées à d et d' sont identiques.*

En effet il résulte de l'hypothèse, que l'application $x \longrightarrow x$ de E muni de la topologie associée à d, sur E muni de la topologie associée à d' est bicontinue, donc est une homéomorphie.

EXEMPLES. — 1° Pour toute distance d sur E, les topologies sur E associées aux distances d, $d/(1+d)$, $\inf(1, d)$, sont identiques.

2° Soit E un produit d'espaces métriques E_i muni de distances d_i. Les topologies sur E associées aux distances

$$(\Sigma\, d_i^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad \sup d_i, \qquad \Sigma\, d_i,$$

sont identiques ; en effet nous savons que les rapports mutuels de ces distances sont bornés.

Z Il est faux que lorsque les topologies sur E associées à deux distances sont identiques, ces distances satisfont à des relations du type utilisé dans la proposition 16-*10*. Par exemple sur $\mathbf{R}_+^*$ les distances $|x-y|$ et $|1/x-1/y|$ donnent à $\mathbf{R}_+^*$ la topologie usuelle, et cependant $|1/x-1/y|$ ne tend pas vers 0 quand $|x-y|$ tend vers 0.

PROPOSITION **16**-*11*. — *1° Tout sous-espace métrique d'un espace métrique* E *a pour topologie la topologie induite par celle de* E.

2° Tout espace métrique E *produit d'un nombre fini d'espaces métriques* E_i *a pour topologie le produit des topologies des* E_i.

DÉMONSTRATION. — 1° C'est immédiat puisque pour tout $A \subset E$, les boules ouvertes de A sont les traces sur A des boules de E.

2° Nous savons déjà que les trois distances $(\Sigma d_i^2)^{\frac{1}{2}}$, $\sup d_i$, Σd_i, définissent sur E la même topologie. Utilisons par exemple la seconde de ces distances : Pour tout point $a = (a_i)$ de E, la boule ouverte $B(a, \rho)$ est le produit des boules ouvertes $B_i(a_i, \rho) \subset E_i$.

Donc ces boules constituent une base de voisinages de a, à la fois pour la topologie associée à la métrique de E, et pour la topologie produit des topologies des E_i.

EXEMPLE. — Dans $\mathbf{R}^n$ la topologie produit utilisée jusqu'ici est identique à la topologie associée à la distance euclidienne.

17. — Continuité uniforme

La possibilité de parler de la petitesse d'un ensemble va nous permettre, comme dans le cas des groupes topologiques, de parler de la continuité uniforme d'une fonction.

Définition 17-*1*. — ON DIT QU'UNE APPLICATION f D'UN ESPACE MÉTRIQUE E DANS UN ESPACE MÉTRIQUE F EST *UNIFORMÉMENT CONTINUE* SI, POUR TOUT $\varepsilon > 0$, IL EXISTE UN $\eta > 0$ TEL QUE :

$$(d_E(x, y) \leqslant \eta) \Longrightarrow \Big(d_F(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon\Big).$$

Une définition équivalente, peut-être plus suggestive, est la suivante :

Définition 17-2. — f EST DITE UNIFORMÉMENT CONTINUE SI, POUR TOUT $\varepsilon > 0$, IL EXISTE UN $\eta > 0$ TEL QUE, POUR TOUT $X \subset E$,

$$(\delta(X) \leqslant \eta) \Longrightarrow \big(\delta(f(X)) \leqslant \varepsilon\big),$$

OÙ δ DÉSIGNE LE DIAMÈTRE, DANS E ET DANS F.

REMARQUES. — 1° Cette définition souligne bien la différence entre la continuité uniforme et la continuité en tout point.

La continuité de f s'exprime ainsi :

$$(\forall x \in E)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0) : (d_E(x, y) \leqslant \eta) \Longrightarrow \big(d_F(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon\big).$$

La continuité uniforme s'exprime ainsi :

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0) : (d_E(x, y) \leqslant \eta) \Longrightarrow \big(d_F(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon\big).$$

Dans le premier cas, η dépend du choix de x et de ε; dans le deuxième cas, η ne dépend que du choix de ε.

Cette remarque prouve évidemment que si f est uniformément continue, elle est continue. Mais la réciproque est fausse : Par exemple l'application $x \longrightarrow x^2$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ n'est pas uniformément continue puisque, pour tout $\eta > 0$, l'oscillation $\omega(a)$ de f sur l'intervalle $[a, a+\eta]$ est $\geqslant |2a\eta + \eta^2|$, et que ces $\omega(a)$ ne sont pas bornées indépendamment de a.

De même l'application $f : x \longrightarrow \sin 1/x$ de $]0, 1[$ dans $[-1, 1]$ n'est pas uniformément continue, bien qu'elle soit bornée; en effet sur chacun des intervalles $]0, \eta]$, l'oscillation de f est égale à 2.

Par contre nous verrons que lorsque E est compact, la réciproque est exacte.

2° On pourrait formuler aisément une notion de continuité uniforme pour une application d'un groupe topologique dans un espace métrique, ou inversement. Ce serait là un nouvel exemple d'une notion générale de continuité uniforme qui peut être formulée en termes de *structure uniforme* sur un ensemble : Les espaces métriques et les groupes topologiques sont deux exemples importants de telles structures uniformes.

Module de continuité. Applications lipschitziennes. — Soit φ une application croissante de $\overline{\mathbf{R}}_+$ dans $\overline{\mathbf{R}}_+$, continue au point 0, et telle que $\varphi(0) = 0$; et soit f une application d'un espace métrique E dans un espace métrique F.

On dit que f admet φ pour *module de continuité* si, pour tous $x, y \in E$, on a

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \varphi(d(x, y)).$$

Comme $\lim_{x \to 0} \varphi(x) = 0$, f est alors uniformément continue.

Inversement, si f est uniformément continue, posons pour tout $u \geqslant 0$:

$$\varphi(u) = \sup \left(d\left(f(x), f(y)\right)\right) \text{ pour tous les } x, y \in \mathrm{E} \text{ tels que } d(x, y) \leqslant u.$$

Il est immédiat que φ est un module de continuité de f.

Donc la notion de continuité uniforme peut s'exprimer en termes de modules de continuité.

Si f applique E dans F, si g applique F dans G, et si f et g ont pour modules de continuité φ et γ, l'application $g \circ f$ a pour module de continuité $\gamma \circ \varphi$.

Les modules de continuité les plus utilisés en analyse sont les fonctions φ du type $u \longrightarrow ku^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$; le cas $\alpha = 1$ fournit les applications lipschitziennes. De façon plus explicite :

Définition 17-3. — SOIT k UN NOMBRE > 0. ON DIT QUE L'APPLICATION f EST *LIPSCHITZIENNE* DE RAPPORT k SI, POUR TOUS $x, y \in \mathrm{E}$ ON A

$$d\left(f(x), f(y)\right) \leqslant k\, d(x, y)$$

LORSQUE $k < 1$, ON DIT QUE f EST *CONTRACTANTE* OU QUE C'EST UNE *CONTRACTION*.

EXEMPLES. — 1° Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle de $\mathbf{R}$. Si f est lipschitzienne de rapport k, la relation $|\Delta f/\Delta x| \leqslant k$ montre que $|f'| \leqslant k$; inversement, si $|f'| \leqslant k$, le théorème des accroissements finis montre que

$$|\Delta f| = |f(x) - f(y)| = |(x-y)f'(z)| \leqslant k\,|\Delta x|,$$

donc f est lipschitzienne de rapport k.

2° Pour tout produit E d'espaces métriques E_i, la projection f_i de E sur l'espace E_i est lipschitzienne de rapport 1 (pour l'une quelconque des trois distances usuelles sur E).

3° Soit E un espace métrique, et soit d sa distance. L'application $(x, y) \longrightarrow d(x, y)$ de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ dans $\mathbf{R}$ est lipschitzienne de rapport 1 (donc aussi continue) lorsqu'on munit $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ de la distance d'' définie par

$$d''\left((x, y), (x', y')\right) = d(x, x') + d(y, y').$$

En effet l'inégalité triangulaire donne

$$d(x', y') \leqslant d(x', x) + d(x, y) + d(y, y')$$

et une relation analogue pour $d(x, y)$, d'où

$$|d(x', y') - d(x, y)| \leqslant d(x, x') + d(y, y') = d''\left((x, y), (x', y')\right).$$

Pour les deux autres distances usuelles, le rapport 1 doit être remplacé par $\sqrt{2}$ et 2 respectivement.

De même, pour tout $a \in \mathrm{E}$, l'application $x \longrightarrow d(a, x)$ est lipschitzienne de rapport 1.

De la continuité de la distance résulte que pour tout $A \subset E$, on a $\delta(A) = \delta(\overline{A})$. On en déduit aussi la proposition suivante :

PROPOSITION **17-4**. — *Pour tous compacts* $A, B \subset E$, *il existe* $a \in A$, $b \in B$ *tels que* $d(a, b) = d(A, B)$.

DÉMONSTRATION. — La fonction d est continue sur le compact $A \times B$, donc elle est bornée et elle atteint sa borne inférieure en un point (a, b), d'où l'énoncé.

De même, il existe un point (a', b') en lequel d atteint sa borne supérieure ; en particulier, si $A = B$, $d(a', b')$ est égal au diamètre de A.

COROLLAIRE **17-5**. — *Si dans* E *toute boule fermée est compacte, alors pour tout* $x \in E$ *et tout fermé* F *de* E, *il existe un* $y \in F$ *tel que* $d(x, y) = d(x, F)$.

Il suffit pour le voir d'appliquer **17-4** aux deux compacts $\{x\}$ et $F \cap B(x, r)$, où r désigne un nombre quelconque $> d(x, P)$.

Isomorphisme de structures uniformes. Métriques équivalentes. — Nous avons défini une notion d'isomorphisme pour les espaces topologiques (les homéomorphies), puis pour les espaces métriques (les isométries). Nous allons voir qu'il existe une notion intermédiaire qui traduit une certaine conservation de la notion de petitesse.

Définition 17-5. — SOIENT E, E′ DEUX ESPACES MÉTRIQUES, ET SOIT f UNE BIJECTION DE E SUR E′. ON DIT QUE f EST UN ISOMORPHISME DES STRUCTURES UNIFORMES DE E, E′ SI f ET f^{-1} SONT UNIFORMÉMENT CONTINUES.

Si l'on désigne par d, d' les distances sur E, E′, on peut traduire immédiatement cette définition comme suit : La bijection $f : x \longrightarrow x'$ est un isomorphisme s'il existe deux modules de continuité φ et φ' tels que, pour tous $x, y \in E$.

$$d'(x', y') \leqslant \varphi(d(x, y)) \quad \text{et} \quad d(x, y) \leqslant \varphi'(d'(x', y')),$$

ou plus brièvement si $d(x, y)$ et $d'(x', y')$ tendent vers 0 simultanément.

Il est évident que le produit de deux isomorphismes en est un.

EXEMPLES. — Soit f une homéomorphie d'un espace *métrique compact* E sur un espace métrique compact E′. Comme f et f^{-1} sont continues et que E, E′ sont compacts, ces applications sont uniformément continues (voir § 18). Donc f est une isomorphie des structures uniformes de E, E′.

2° Par contre l'application $x \longrightarrow x/(1 + |x|)$ de **R** sur $]-1, 1[$ est uniformément continue et c'est une homéomorphie. Mais f^{-1} n'est pas uniformément continue, donc f n'est pas une isomorphie.

Définition 17-7. — SOIENT d, d' DEUX DISTANCES SUR UN ENSEMBLE E. ON DIT QU'ELLES SONT *ÉQUIVALENTES* SI L'APPLICATION IDENTIQUE $x \longrightarrow x$ DE E

MUNI DE LA DISTANCE d SUR E MUNI DE LA DISTANCE d' EST UNIFORMÉMENT CONTINUE AINSI QUE SON INVERSE.

C'est évidemment un cas particulier d'isomorphisme; la condition se traduit brièvement par le fait que $d(x, y)$ et $d'(x, y)$ tendent vers 0 simultanément, au sens de la proposition 16-*10*.

EXEMPLE. — Les trois distances usuelles sur un produit d'espaces métriques sont équivalentes.

Il est évident que les notions de continuité et de continuité uniforme sur un espace métrique ne changent pas quand on remplace la métrique par une métrique équivalente.

18. — Espaces métriques compacts

Nous baserons leur étude sur le lemme fondamental suivant.

LEMME **18**-*1*. — *Soit* E *un espace métrique, et soit* K *une partie fermée de* E *telle que toute suite infinie de points de* K *contienne une suite partielle convergente.*

Pour toute famille $(\omega_i)_{i\in I}$ *d'ouverts de* E *recouvrant* K, *il existe un nombre* $\rho > 0$ *tel que, pour tout* $x \in$ K, *la boule ouverte* $B(x, \rho)$ *soit contenue dans au moins un* ω_i.

DÉMONSTRATION. — Il s'agit en somme de montrer que, non seulement les ω_i recouvrent K, mais qu'ils le recouvrent ρ-uniformément, en un sens que précise l'énoncé.

Supposons qu'il n'existe pas un tel ρ; pour tout entier n, il existe alors un point x_n de K tel que $B(x_n, 1/n)$ ne soit contenu dans aucun ω_i; cette suite (x_n) contient une suite partielle (x_{n_i}) convergente; soit a la limite de cette suite partielle.

Comme K est fermé, a appartient à K. Il existe donc un ouvert ω de la famille qui contient a; soit $B(a, \lambda)$ une boule ouverte de centre a contenue dans ω.

La boule $B(x_{n_i}, (\lambda - \varepsilon_{n_i}))$ où $\varepsilon_{n_i} = d(a, x_{n_i})$ est contenue dans $B(a, \lambda)$ d'après l'inégalité triangulaire, donc *a fortiori* dans ω. Comme ε_{n_i} tend vers 0 quand $n_i \to \infty$, la boule $B(x_{n_i}, 1/n_i)$ est contenue dans ω dès que n_i est assez grand, contrairement à l'hypothèse.

Cette contradiction démontre le lemme.

Z Il est faux que pour toute partie K d'un espace métrique la propriété énoncée dans le lemme soit vraie. Par exemple si E $=$ **R** et K $=]0, 1[$, la famille (ω_i) réduite à l'ouvert $]0, 1[$ ne possède pas la

propriété énoncée. On obtient un exemple analogue avec $E = K =]0, 1[$; de plus, ici K est fermé dans E.

Ce lemme a des conséquences importantes, en particulier les théorèmes 18-2 et 18-4 qui suivent.

THÉORÈME **18-2**. — *Pour tout espace métrique* E, *les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*

1° E est compact ;

2° Toute suite infinie de points de E a au moins une valeur d'adhérence ;

3° Toute suite infinie de points de E contient une suite partielle convergente ;

4° Toute partie infinie de E a au moins un point d'accumulation.

DÉMONSTRATION.

(1) $\Longrightarrow$ (2) d'après la proposition 11-5.

(2) $\Longrightarrow$ (3) d'après la proposition 16-5.

(3) $\Longrightarrow$ (4). En effet, si A est une partie infinie de E, il existe une suite infinie (x_n) de points *distincts* de A; elle contient une suite partielle qui converge; si x est sa limite, x est évidemment un point d'accumulation de A.

(4) $\Longrightarrow$ (1). En effet, supposons que toute partie infinie de E ait au moins un point d'accumulation.

Soit $(\omega_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E; on va en extraire un recouvrement fini de E, ce qui démontrera la compacité de E :

D'après le lemme précédent, il existe un nombre $\rho > 0$ tel que toute boule ouverte $B(x, \rho)$ de E soit contenue dans un ω_i de la famille.

Soit x_1 un point de E; si $B(x_1, \rho)$ ne recouvre pas E, il existe un point x_2 tel que $d(x_1, x_2) \geqslant \rho$. De façon générale supposons définis les points $x_1, x_2, ..., x_p$ de distances mutuelles $\geqslant \rho$. Si la réunion des $B(x_n, \rho)$ $(n = 1, 2, ..., p)$ ne recouvre pas E, il existe un point x_{p+1} tel que les distances de x_{p+1} aux x_n $(n \leqslant p)$ soient $\geqslant \rho$.

La suite des x_n ne peut pas être infinie; sinon ces x_n constitueraient un ensemble infini de points de distances mutuelles $\geqslant \rho$, ce qui exclut la possibilité d'un point d'accumulation, contrairement à l'hypothèse.

Donc il existe un entier p tel que la famille des boules $B(x_n, \rho)$ $(n \leqslant p)$ recouvre E; chacune d'elles est contenue dans un ω_i; ces ω_i fournissent le recouvrement fini cherché.

COROLLAIRE. — *Soit* X *une partie d'un espace métrique* E. *Dire que* X *est relativement compact dans* E *équivaut à dire que toute suite infinie de points de* X *contient une suite partielle qui converge vers un point de* E.

DÉMONSTRATION. — 1° En effet, si $\overline{X}$ est compact, toute suite infinie de points de X est une suite infinie de points de $\overline{X}$, donc elle contient une suite partielle qui converge dans $\overline{X}$.

2° Inversement, si cela a lieu, montrons que $\overline{X}$ est compact. Soit (x_n) une suite de points de $\overline{X}$; pour tout n, il existe $x'_n \in X$ tel que $d(x_n, x'_n) < 1/n$; la suite (x'_n) contient une suite partielle (x'_{n_i}) qui converge vers un point a de E; la suite (x_{n_i}) converge évidemment aussi vers a, qui est adhérent à $\overline{X}$, donc dans $\overline{X}$.

Donc d'après le théorème 18-*2*, $\overline{X}$ est compact.

On énoncerait aisément des critères équivalents en termes de points d'accumulation, ou de points adhérents à une suite.

PROPOSITION **18-*3***. — *Tout espace métrique compact* E *admet une base dénombrable constituée de boules ouvertes.*

DÉMONSTRATION. — En effet, pour tout entier n, les boules ouvertes $B(x, 1/n)$ recouvrent E, donc il existe une famille finie $\mathcal{F}_n$ de ces boules qui recouvre E; la réunion de ces familles finies est la famille cherchée : En effet, pour tout ouvert ω de E, et pour tout $x \in \omega$, il existe des éléments B de cette famille qui contiennent x, et de diamètre arbitrairement petit; l'un d'eux, B_x, est donc contenu dans ω; et ω est évidemment la réunion de ces B_x.

COROLLAIRE. — *Tout espace métrique compact contient un sous-ensemble dénombrable partout dense.*

En effet, si (B_i) est la famille dénombrable des boules qu'on vient de construire, et si x_i désigne un point quelconque de B_i, l'ensemble des x_i répond à la question.

THÉORÈME **18-*4***. — *Toute application continue f d'un espace métrique compact* E *dans un autre espace métrique* F *est uniformément continue.*

A cause de l'importance de ce théorème, nous en donnerons deux démonstrations.

PREMIÈRE DÉMONSTRATION. — Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue on peut, à tout $x \in E$, associer un voisinage ouvert ω_x tel que l'oscillation de f sur ω_x soit $\leqslant \varepsilon$.

Soit ρ le nombre associé à la famille des ω_x d'après le lemme 18-*1*. Toute boule $B(y, \rho)$ de E est contenue dans au moins un ω_x; donc sur cette boule l'oscillation de f est $\leqslant \varepsilon$; ceci démontre la continuité uniforme de f.

DEUXIÈME DÉMONSTRATION. — Si f n'est pas uniformément continue, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout entier $n > 0$, il existe deux points x_n, $y_n \in$ E tels que

$$d(x_n, y_n) \leqslant 1/n \quad \text{et} \quad d(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon .$$

De la suite (x_n) on peut extraire une suite partielle (x_{n_i}) qui converge vers un point a de E; comme $\lim d(x_n, y_n) = 0$, la suite (y_{n_i}) converge aussi vers a. Donc tout voisinage V de a contient des couples (x_n, y_n); l'oscillation de f sur tout V est donc au moins égale à ε, donc f n'est pas continue en a. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse.

On peut étendre le théorème 18-*4* et obtenir un énoncé un peu plus général et très commode :

THÉORÈME **18**-*5*. — *Soit* E *un espace métrique,* K *un compact contenu dans* E *et soit f une application de* E *dans un espace métrique* F. *Si f est continue en tout point de* K, *alors f est uniformément continue* autour *de* K *en ce sens que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\rho > 0$ tel que pour tout $x \in$* K *l'oscillation de f sur la boule* $B(x, \rho)$ *soit $\leqslant \varepsilon$.*

La démonstration se fait en adaptant l'une ou l'autre des démonstrations du théorème 18-*4*, par exemple en appliquant le lemme 18-*1* à la famille des ouverts ω_x ainsi définis : Pour tout $x \in$ K, ω_x est un voisinage ouvert de x dans E sur lequel l'oscillation de f est $\leqslant \varepsilon$.

Notons que dans cet énoncé on ne suppose nullement la continuité de f en dehors de K.

19. — Espaces métriques connexes.

Pour les espaces métriques, on va voir qu'on peut préciser la notion intuitive de connexité.

Définition 19-*1*. — UN ESPACE MÉTRIQUE E EST DIT *BIEN ENCHAÎNÉ* SI POUR TOUT COUPLE (a, b) DE POINTS DE E ET POUR TOUT $\varepsilon > 0$, IL EXISTE UNE SUITE FINIE DE POINTS DE E : $a_1, \ldots, a_n$ AVEC $a_1 = a$ ET $a_n = b$, TELLE QUE $d(a_i, a_{i+1}) \leqslant \varepsilon$ POUR TOUT $i < n$: AUTREMENT DIT SI ON PEUT RELIER a ET b PAR UNE CHAÎNE DE PAS AU PLUS ÉGAL À ε.

PROPOSITION **19**-*2*. — *Tout espace métrique connexe* E *est bien enchaîné.*

DÉMONSTRATION. — Soit $a \in$ E et soit $E(a, \varepsilon)$ l'ensemble des points x de E que l'on peut relier à a par une chaîne de pas au plus égal à ε. Cet ensemble n'est pas vide puisqu'il contient a; il est ouvert car si $x \in E(a, \varepsilon)$ il en est de même de tout y tel que $d(x, y) < \varepsilon$; il est fermé car si x est point

d'accumulation de $E(a, \varepsilon)$ il existe des points y de $E(a, \varepsilon)$ tels que $d(x, y) < \varepsilon$.

Comme E est connexe, on a donc $E(a, \varepsilon) = E$, autrement dit on peut relier tout point b de E à a par une chaîne de pas inférieur à ε. Donc E est bien enchaîné.

Z Il est faux qu'inversement tout espace métrique bien enchaîné soit connexe : Par exemple, l'ensemble **Q** des rationnels est bien enchaîné mais non connexe. Par contre cette réciproque devient exacte si E est compact :

PROPOSITION 19-3. — *Dire qu'un espace métrique compact est connexe équivaut à dire qu'il est bien enchaîné.*

DÉMONSTRATION. — Il nous reste à montrer une partie de cette équivalence. Soit donc E un espace métrique compact. S'il n'est pas connexe, il existe une partition de E en deux fermés E_1, E_2 non vides. Comme E_1 et E_2 sont compacts, leur distance δ n'est pas nulle. On ne peut pas relier un point de E_1 et un point de E_2 par une chaîne de pas inférieur à $\delta/2$, car soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ une telle chaîne et soit i le plus petit indice tel que $a_i \in E_2$; alors $a_{i-1} \in E_1$ et $d(a_{i-1}, a_i) < \delta/2$, en contradiction avec l'égalité

$$d(E_1\ E_2) = \delta.$$

Autrement dit, si E est bien enchaîné, il est aussi connexe.

COROLLAIRE 19-4. — *Tout intervalle compact de* **R** *est connexe.*

En effet tout intervalle $[a, b]$ est compact et il est évidemment bien enchaîné (utiliser des points $a + n\,\varepsilon$).

Plus généralement, soit E un intervalle quelconque de **R**, et $x_0 \in E$; pour tout $x \in E$, on a $[x_0, x] \subset E$, donc E est réunion des intervalles compacts $[x_0, x]$; il est donc connexe.

Inversement nous avons vu, lors de l'étude des espaces topologiques connexes, qu'une partie de **R** qui n'est pas un intervalle n'est pas connexe. En résumé :

PROPOSITION 19-5. — *Les seuls ensembles connexes de* **R** *sont les intervalles (ouverts, semi-ouverts ou fermés).*

COROLLAIRE. — *Pour toute fonction numérique continue f sur un espace topologique connexe* E, *l'ensemble f(E) est un intervalle de* **R**.

Donc si f prend sur E des valeurs positives et des valeurs négatives, elle s'annule en au moins un point de E.

APPLICATION **19**-*6*. — Soit f une fonction numérique continue et strictement croissante définie sur un intervalle E de **R**.

Comme f est une isomorphie des ordres de E et f(E), c'est aussi une homéomorphie pour les topologies associées à ces ordres. Or, f étant continue, f(E) est un intervalle; donc sur f(E) la topologie de l'ordre est identique à la topologie induite par celle de **R**; il en est de même pour E. Donc f est une homéomorphie des intervalles E, f(E); la fonction inverse f^{-1} est donc aussi continue et strictement croissante.

On a évidemment un résultat analogue si f est strictement décroissante.

20. — Suites de Cauchy et espaces complets

Lors de l'étude de **R**, nous avons défini la notion de suite de Cauchy, et montré que toute suite de Cauchy de **R** est convergente.

La notion de suite de Cauchy n'est pas une notion topologique puisque, par exemple, la suite $(1/n)$ qui est une suite de Cauchy de $]0, \longrightarrow[$ se transforme, par l'homéomorphie $x \longrightarrow x^{-1}$ de $]0, \longrightarrow[$ sur lui-même en la suite (n) qui n'est pas une suite de Cauchy.

On ne peut donc pas espérer définir la notion de suite de Cauchy dans les espaces topologiques.

Par contre nous allons voir que ceci peut se faire aisément dans les espaces métriques.

Définition 20-*1*. — SOIT E UN ESPACE MÉTRIQUE, ET SOIT (x_n) UNE SUITE INFINIE DE POINTS DE E. ON DIT QUE CETTE SUITE EST UNE *SUITE DE CAUCHY* SI $d(x_p, x_q)$ TEND VERS 0 QUAND p ET q TENDENT VERS $+\infty$, AUTREMENT DIT SI POUR TOUT $\varepsilon > 0$, IL EXISTE UN ENTIER n TEL QUE, POUR TOUS $p, q \geqslant n$, ON AIT $d(x_p, x_q) \leqslant \varepsilon$.

En abrégé :

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n, n \in \mathrm{N})\ (\forall p, q \geqslant n) : \big(d(x_p, x_q) \leqslant \varepsilon\big).$$

On obtient une définition équivalente, peut-être plus suggestive, en utilisant l'ensemble A_n des points x_p tels que $p \geqslant n$:

Définition 20-*2*. — (x_n) EST UNE SUITE DE CAUCHY SI $\lim \delta(A_n) = 0$ (OÙ $\delta(A_n)$ DÉSIGNE LE DIAMÈTRE DE A_n).

Toute suite partielle infinie d'une suite de Cauchy en est une. Si une suite partielle d'une suite de Cauchy converge vers un point x, la suite donnée converge aussi vers x.

EXEMPLES. — 1° Pour tout espace métrique E, toute suite (x_n) qui converge vers un point de E est une suite de Cauchy.

2° Dans le sous-espace métrique $E =]0, \rightarrow[$ de **R**, la suite $(1/n)$ est une suite de Cauchy non convergente.

3° Plus généralement, soit E un sous-espace métrique d'un espace métrique F; pour tout $x \in \overline{E}$, il existe une suite (x_n) de points de E qui converge vers x; cette suite est une suite de Cauchy dans E; elle ne converge dans E que si $x \in E$.

4° Soit E l'ensemble des fonctions numériques continues sur $[0, 1]$; on pose pour toutes $f, g \in E$:

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx .$$

On vérifiera que d est bien une distance sur E Si l'on pose :

$$f_n(x) = \inf(n, x^{-\frac{1}{2}}),$$

on vérifiera que f_n est une suite de Cauchy dans E.

PROPOSITION 20-3. — *Soient* E, F *deux espaces métriques, et soit f une application uniformément continue de* E *dans* F*; l'image par f de toute suite de Cauchy (x_n) de* E *est une suite de Cauchy de* F.

En effet, si A_n et B_n désignent respectivement l'ensemble des x_p et des $f(x_p)$ tels que $p \geqslant n$, on a $f(A_n) = B_n$; or $\lim \delta(A_n) = 0$; donc comme f est uniformément continue, on a $\lim \delta(B_n) = 0$, c'est-à-dire que $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy.

Z Si f était seulement continue, elle transformerait encore toute suite de Cauchy *convergente* en une suite convergente, donc de Cauchy; mais l'exemple 2 ci-dessus nous a montré qu'elle pourrait transformer certaines suites de Cauchy non convergentes en suites qui ne soient pas de Cauchy.

COROLLAIRE. — *Si f est un isomorphisme des structures uniformes de* E *et* F, *f échange les suites de Cauchy de* E *et* F.

En particulier, si d et d' sont deux distances équivalentes sur un ensemble E, les suites de Cauchy sont les mêmes pour les métriques associées à d et d'. La notion de suite de Cauchy de E n'est donc pas liée à la structure métrique de E, mais à sa structure uniforme.

PROPOSITION 20-4. — *Soit* E *un produit fini d'espaces métriques* E_i. *Soit (x_n) une suite de points de* E *et soit $(x_{n,i})$ sa projection sur* E_i.

$\big((x_n)$ *est une suite de Cauchy de* E$\big) \Longleftrightarrow \big(\forall i,\ (x_{n,i})$ *est de Cauchy dans* $E_i\big)$.

DÉMONSTRATION. — Soit d_i la distance sur E_i ; comme les trois distances usuelles sur E sont équivalentes, le corollaire ci-dessus montre que nous pouvons prendre sur E l'une quelconque de ces distances ; nous prendrons

$$d''(x, y) = \Sigma\, d_i(x_i, y_i).$$

La projection $x \longrightarrow x_i$ de E sur E_i est lipschitzienne de rapport 1, donc uniformément continue ; donc si (x_n) est de Cauchy, $(x_{n,i})$ l'est aussi.

Inversement, si chaque $(x_{n,i})$ est une suite de Cauchy, la relation

$$d(x_p, x_q) = \sum_i d(x_{p,i}, x_{q,i}).$$

montre que (x_n) est une suite de Cauchy.

Espaces complets. — Dans **R**, toute suite de Cauchy converge ; par contre plusieurs des exemples ci-dessus montrent qu'il existe des espaces métriques dans lesquels certaines suites de Cauchy ne convergent pas. On est donc conduit à étudier les espaces dans lesquels toute suite de Cauchy converge.

Définition 20-5. — ON DIT QU'UN ESPACE MÉTRIQUE E EST UN *ESPACE COMPLET* SI TOUTE SUITE DE CAUCHY DE POINTS DE E EST CONVERGENTE DANS E.

EXEMPLES. — **R** muni de la distance usuelle est complet. Par contre] 0, 1 [et **Q** ne sont pas complets.

Nous verrons en 22-*8* que tout espace métrique peut être rendu complet par l'addition de nouveaux points.

PROPOSITION 20-*6*. — *Soit* E *un espace métrique complet. Pour toute suite décroissante* (X_n) *de fermés non-vides de* E *tels que* $\lim \delta(X_n) = 0$, *l'intersection* X *des* X_n *contient exactement un point.*

DÉMONSTRATION. — Choisissons dans chaque X_n un point x_n quelconque. Si $p \geqslant n$, on a $X_p \cup X_n$, donc aussi $x_p \in X_n$.

Donc l'ensemble A_n des x_p tels que $p \geqslant n$ est contenu dans X_n ; il en résulte que $\lim \delta(A_n) = 0$; donc la suite (x_n) est une suite de Cauchy. Comme E est complet, elle converge vers un point x.

Or pour tout n fixe, x est limite des points x_{n+p} qui appartiennent à X_n ; comme X_n est fermé, on a $x \in X_n$ pour tout n, d'où $x \in X$.

Enfin, comme $\delta(X) \leqslant \delta(X_n)$ pour tout n, on a $\delta(X) = 0$, donc X ne peut contenir qu'un point.

Z On pourrait s'attendre à ce que, si $\lim \delta(X_n) > 0$, non seulement l'intersection des X_n ne soit pas vide, mais encore contienne plus d'un point. Il n'en est rien, ainsi que le montre l'exemple suivant :

Dans l'espace complet **R**, les intervalles $[n, \longrightarrow[$ constituent une suite décroissante de fermés de diamètre infini, et cependant leur intersection est vide.

Autrement dit, le fait qu'un espace est complet ne se manifeste que pour les petits ensembles. Nous allons confirmer ce fait par un énoncé qui complète la proposition 20-6.

Définition 20-7. — SOIT E UN ESPACE MÉTRIQUE, ET SOIT $\mathscr{B}$ UNE BASE DE FILTRE SUR E. ON DIT QUE $\mathscr{B}$ EST UNE *BASE DE FILTRE DE CAUCHY* SI POUR TOUT $\varepsilon > 0$, IL EXISTE UN $X \in \mathscr{B}$ TEL QUE $\delta(X) < \varepsilon$.

EXEMPLE 1. — Pour toute suite (A_n) décroissante de parties non-vides de E, les A_n constituent une base de filtre de Cauchy si $\lim \delta(A_n) = 0$.

EXEMPLE 2. — Soit $\mathscr{F}$ un ensemble ordonné filtrant, c'est-à-dire tel que pour tous $a, b \in \mathscr{F}$, il existe $c \in \mathscr{F}$ avec $a, b \leqslant c$.

On dira qu'une application f de $\mathscr{F}$ dans E métrique satisfait à la condition de Cauchy si la base de filtre sur E constituée par les ensembles de la forme $\{f(x) : a \leqslant x\}$ est de Cauchy.

PROPOSITION **20-8.** — *Toute base de filtre de Cauchy sur un espace métrique complet* E *est convergente.*

DÉMONSTRATION. — Soit $\mathscr{B}$ une base de filtre de Cauchy sur E. Pour tout entier n, il existe un $X_n \in \mathscr{B}$ tel que $\delta(X_n) < 1/n$. Soit x_n un point quelconque de X_n.

Pour tous p, q on a

$$X_p \cap X_q \neq \emptyset, \text{ donc } \delta(X_p \cup X_q) < 1/p + 1/q;$$

on a donc aussi

$$d(x_p, x_q) < 1/p + 1/q.$$

La suite (x_n) est donc une suite de Cauchy; soit x sa limite. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un n tel que

$$d(x, x_n) < \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \delta(X_n) < \varepsilon/2.$$

Comme $x_n \in X_n$, on a donc $X_n \subset \mathbf{B}(x, \varepsilon)$.

C'est bien dire que $\mathscr{B}$ converge vers x.

EXEMPLE. — Soit f une fonction numérique sur un espace localement compact mais non compact E. On suppose que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset E$ tel que l'oscillation de f sur $\complement K$ soit $< \varepsilon$.

Les $f(\complement K)$ constituent alors une base de filtre de Cauchy sur $\mathbf{R}$; ce filtre converge vers un nombre l, qu'on appelle limite de $f(x)$ quand x tend vers l'infini.

Une classe importante d'espaces complets est fournie par le théorème suivant :

THÉORÈME **20-9.** — *Tout espace métrique compact est complet.*

DÉMONSTRATION. — Avec les notations déjà utilisées, pour toute suite (x_n) de points de E, l'adhérence de cette suite est

$$A = \bigcap \overline{A}_n .$$

Si la suite est une suite de Cauchy, $\lim \delta(A_n) = 0$, donc $\delta(A) = 0$. De plus, d'après la proposition 11-5, A n'est pas vide; il est donc réduit à un point; et d'après la même proposition, la suite converge vers ce point.

REMARQUE. — Il y a d'autres espaces complets que les espaces métriques compacts : La droite réelle **R** en est l'exemple classique. Le fait que celle-ci est localement compacte pourrait conduire à croire que tout espace métrique localement compact est complet ou que tout espace complet est localement compact; aucune de ces propositions n'est exacte : Par exemple le sous-espace métrique] 0, 1 [de **R** est localement compact, mais non complet. Par ailleurs, l'espace $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$ que nous définirons au paragraphe 22 est un espace complet sans être localement compact.

COROLLAIRE. — *Soit* E *un espace métrique et, soit* $a \in$ E. *Si toute boule fermée de* E *de centre* a *est compacte,* E *est complet.*

En effet toute suite de Cauchy étant bornée, est contenue dans l'une des boules fermées de centre a ; le théorème 20-9 montre que cette suite converge dans la boule, donc aussi dans E.

Z Par contre un espace métrique E peut être localement compact sans être complet : c'est le cas du sous-espace] 0, 1 [de **R**. Et inversement E peut être complet sans être localement compact : c'est le cas pour l'espace $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$ que nous définirons au n° 22.

Analogie entre espaces complets et espaces compacts. — On a pu constater dans les démonstrations précédentes une certaine analogie entre espaces complets et espaces compacts. Nous allons la préciser par une suite de théorèmes analogues à des théorèmes précédemment établis pour les espaces compacts. Par contre nous signalerons aussi plusieurs différences importantes.

THÉORÈME **20-*10***. — *Pour tout espace métrique complet* E, *tout sous-ensemble fermé* A *de* E *est un sous-espace métrique complet.*

En effet soit (x_n) une suite de Cauchy de points de A. Cette suite est aussi une suite de Cauchy de points de E, donc elle converge vers un point x de E; mais comme les points de la suite appartiennent à A qui est fermé, on a aussi $x \in$ A. Donc la suite converge bien vers un point de A.

THÉORÈME **20-*11***. — *Pour tout espace métrique* E, *tout sous-espace métrique complet* A *de* E *est fermé.*

Montrons en effet que A contient ses points d'accumulation. Soit x un tel point. Ce point est limite d'une suite (x_n) de A. Cette suite est convergente; c'est donc une suite de Cauchy; par hypothèse elle converge vers un point de A. Donc on a bien $x \in$ A.

COROLLAIRE. — *Pour tout espace métrique complet* E, *il y a identité entre les sous-ensembles fermés de* E *et les sous-espaces complets de* E.

THÉORÈME 20-*12*. — *Dans tout espace métrique* E, *la réunion de deux sous-espaces complets est complète; toute intersection de sous-espaces complets est complète.*

1° Soient A et B deux sous-espaces complets de E; soit (x_n) une suite de Cauchy de $(A \cup B)$; toute sous-suite infinie de cette suite est une suite de Cauchy. Or la trace de cette suite sur l'un des ensembles A ou B est une sous-suite infinie; les ensembles A et B étant complets, cette sous-suite converge vers un point de A ou de B; et la suite (x_n) converge vers le même point.

2° Si les $(A_\iota)_{\iota \in I}$ sont complets, chacun d'eux est fermé dans E; donc leur intersection est fermée dans E et *a fortiori* dans l'un quelconque A_{ι_0} de ces sous-espaces complets. Donc d'après le théorème 20-*10*, cette intersection est un espace complet.

Z Soient E, F deux espaces métriques, et soit f une surjection uniformément continue de E sur F. Il est faux que si E est complet, F le soit nécessairement, même dans le cas où f est uniformément continue et est une homéomorphie.

Par exemple, l'application $x \longrightarrow x/(1+|x|)$ de **R** sur $]-1, 1[$ possède ces propriétés, et $]-1, 1[$ n'est pas complet bien que **R** le soit.

Par contre si f est une isomorphie des structures uniformes de E, F, ces deux espaces sont simultanément complets ou non complets; en particulier, si d et d' sont deux métriques équivalentes sur un même ensemble E, les espaces métriques associés sont simultanément complets ou non complets.

Plus généralement, soit f une homéomorphie de E sur F; si f est uniformément continue, et si F est complet, E l'est aussi.

THÉORÈME 20-*13*. — *Tout produit fini d'espaces métriques complets est complet.*

DÉMONSTRATION. — Soit E_i une famille finie d'espaces métriques complets. Pour toute suite de Cauchy (x_n) de $E = \Pi E_i$, sa projection sur E_i est une suite de Cauchy (proposition 20-*4*); soit a_i sa limite. La suite (x_n) converge dans E vers $a = (a_i)$ (proposition 10-*3*); donc E est complet.

EXEMPLE. — Comme **R** est complet, $\mathbf{R}^n$ l'est aussi. Tout fermé de $\mathbf{R}^n$ est donc aussi complet.

Prolongement de fonctions uniformément continues. — Si f désigne une application continue d'un espace métrique E dans un autre espace métrique F, la restriction de f à tout $X \subset E$ est aussi continue; inversement, si l'on se donne une application continue f de X dans F, la question se pose de savoir si l'on peut prolonger f à E, c'est-à-dire si f est la restriction à X d'une application continue de E dans F.

Nous n'examinerons ici qu'un cas particulier, fort utile, de cette question.

THÉORÈME 20-*14*. — *Soit* X *une partie partout dense d'un espace métrique* E, *et soit* f *une application uniformément continue de* X *dans un espace métrique complet* F. *Il existe alors une application continue unique* g *de* E *dans* F *dont la restriction à* X *soit* f; *cette application* g *est uniformément continue.*

DÉMONSTRATION. — Si g est un tel prolongement, pour tout $a \in E$ on a :

$$g(a) = \lim_{\substack{x \in X \\ x \to a}} f(x)$$

Cette relation, d'une part montre que si g existe elle est unique, d'autre part fournit la valeur éventuelle de $g(a)$ pour tout $a \in E$.

Comme f est uniformément continue, le diamètre de $f\big(B(a, \rho)\big)$ tend vers 0 avec ρ; donc pour tout $a \in E$, les ensembles $f\big(B(a, \rho)\big)$ constituent une base de filtre de Cauchy de F, et comme F est complet, cette base de filtre converge (proposition 20-*8*) vers un point de F que nous noterons $g(a)$.

Si $a \in X$, on a $f(a) \in f\big(B(a, \rho)\big)$, donc $f(a) = g(a)$;
donc si nous montrons que g est uniformément continue, g sera le prolongement cherché de f.

Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta = \varphi(\varepsilon) > 0$ tel que pour tous $x, y \in X$ vérifiant $d(x, y) < \eta$, on ait $d\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \varepsilon$.

Soient alors $a, b \in E$ tels que $d(a, b) < \eta$; il existe deux suites (a_n), (b_n) de points de X qui convergent respectivement vers a, b, et telles que $d(a_n, b_n) < \eta$ pour tout n.

Les relations :

$$g(a) = \lim f(a_n); \qquad g(b) = \lim f(b_n); \qquad d\big(f(a_n), f(b_n)\big) \leqslant \varepsilon$$

entraînent $d\big(g(a), g(b)\big) \leqslant \varepsilon$ puisque la distance d est une fonction continue.

Donc g est uniformément continue; et la démonstration montre même que si un module de continuité φ de f est continu, c'est aussi un module de continuité pour son prolongement g; en particulier si f est lipschitzienne de rapport k, il en est de même de g.

21. — Schéma de la méthode des approximations successives

Une des méthodes les plus puissantes pour démontrer l'existence de solutions d'une équation, qu'elle soit numérique, différentielle, aux dérivées partielles, ou intégrale, et parfois pour calculer effectivement cette solution, est la méthode dite des approximations successives, utilisée pour la première fois systématiquement par Emile Picard. Elle peut se ramener dans de nombreux cas à un schéma que nous concrétiserons par le théorème du point fixe qui suit :

Définition 21-*1*. — SOIT f UNE APPLICATION D'UN ENSEMBLE E DANS LUI-MÊME. ON APPELLE *POINT FIXE* DE f TOUT $x \in \mathrm{E}$ TEL QUE $f(x) = x$.

THÉORÈME DU POINT FIXE **21**-*2*. — *Soit* E *un espace métrique* complet *et soit* f *une contraction de* E *dans lui-même. Alors* f *a un point fixe et un seul.*

De façon plus précise, pour tout $x_0 \in \mathrm{E}$, *la suite des transformés successifs* $x_n = f^n(x_0)$ *du point* x_0 *converge vers un point* a *qui est une solution de l'équation* $x = f(x)$. *Cette solution* a *est la seule solution de cette équation.*

DÉMONSTRATION. — On suppose que f est lipschitzienne d'ordre k, avec $k < 1$, et on pose $x_1 = f(x_0)$, et plus généralement $x_{n+1} = f(x_n)$. Pour tout n, le transformé du couple (x_{n-1}, x_n) est le couple (x_n, x_{n+1}).

On a donc $\quad d(x_n, x_{n+1}) \leqslant k\, d(x_{n-1}, x_n)$.

On tire des n premières relations de cette forme que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant k^n\, d(x_0, x_1)$$

d'où $d(x_n, x_{n+p}) \leqslant \sum_{n}^{n+p-1} d(x_i, x_{i+1}) \leqslant d(x_0, x_1) \sum_{n}^{\infty} k^p = d(x_0, x_1) k^n/(1-k)$.

Comme $0 \leqslant k < 1$, la suite des x_n est donc une suite de Cauchy. Soit a son point limite; comme f est continue, $\lim f(x_n) = f(a)$.

La relation $x_{n+1} = f(x_n)$ donne donc à la limite : $a = f(a)$.

Cette solution a est la seule de l'équation $x = f(x)$, car pour toute solution x de cette équation, on a :

$$d(x, a) = d\big(f(x), f(a)\big) \leqslant k\, d(x, a),$$

ce qui entraîne $\quad d(x, a) = 0, \quad$ donc $\quad x = a$.

Remarquons que la méthode utilisée constitue un procédé de calcul effectivement utilisable puisque la série de terme général $d(x_n, x_{n+1})$ converge plus vite qu'une série géométrique de raison k. Plus précisément, on a :

$$d(x_n, a) = \lim_{p \to \infty} d(x_n, x_{n+p}) \leqslant d(x_0, x_1)\, k^n/(1-k).$$

Il peut arriver que la convergence soit encore plus rapide, par exemple

lorsque la restriction de f à un voisinage V de a est contractante d'ordre k (V) et que k (V) tend vers 0 avec le diamètre de V.

Z 1° Toute application contractante f de E dans lui-même est telle que pour tous $x, y \in$ E (avec $x \neq y$), on ait $d\,(f(x), f(y)) < d\,(x, y)$; mais la réciproque est fausse. Il peut même arriver que f diminue strictement les distances en ce sens, et que E soit complet, sans que f ait de point fixe : C'est le cas pour l'application $x \longrightarrow (x^2 + 1)^{1/2}$ de $\mathbf{R}_+$ dans lui-même.

2° Lorsque E n'est pas complet, une application contractante de E dans E peut ne pas avoir de point fixe : Par exemple l'application $x \longrightarrow x/2$ de $]0, 1]$ dans lui-même n'a pas de point fixe.

REMARQUES **21**-*3*. — Soit f une application contractante de rapport k de E complet dans lui-même; soit a le point fixe de E.

Pour tout nombre $\rho > 0$,

$$f^n\,(\mathrm{B}(a, \rho)) \subset \mathrm{B}\,(a, k^n \rho).$$

En particulier, si E est borné, la suite décroissante $\delta\;(f^n\,(\mathrm{E}))$ a pour limite 0; les suites $f^n\,(x)$ convergent donc vers a de façon uniforme.

21-*4*. — Il peut arriver que f ne soit pas contractante, mais qu'une puissance convenable f^p de f le soit ; posons alors $f^p = g$.

On peut appliquer le théorème 21-*1* à g. Si a est le point fixe de g, la relation $g\,(a) = a$ donne

$$f(g\,(a)) = f(a)\,;\ \text{or}\ f^{p+1} = f(g) = g\,(f)\,;$$

on a donc aussi
$$g\,(f(a)) = f(a)\,.$$

Donc $f\,(a)$ est un point fixe de g; l'unicité d'un tel point montre que $f\,(a) = a$; autrement dit a est aussi un point fixe de f.

Pour tout $x_0 \in$ E, les $g^n\,(x_0)$ ou $f^{np}\,(x_0)$ convergent vers a; comme f est continue, il en est de même des $f^{np+1}\,(x_0)$, et plus généralement des $f^{np+i}\,(x_0)$ (où $i \leqslant p$); donc la suite des $f^n\,(x_0)$ converge aussi vers a.

EXEMPLES. — 1° E est un espace euclidien $\mathbf{R}^n$ et f est une similitude (transformation qui multiplie les distances par un facteur constant) de rapport $k < 1$. Le point fixe a de f s'appelle centre de la similitude.

2° Soit f une fonction numérique dérivable définie sur un intervalle fermé borné $\mathrm{E} = [a, b]$, telle que l'ensemble de ses valeurs soit également contenu dans $[a, b]$, et telle que $|f'| \leqslant k$ où $k < 1$.

L'application f de $[a, b]$ dans lui-même est alors contractante de rapport k et le théorème s'applique.

C'est une des méthodes bien connues de résolution des équations numériques.

Par exemple soit f l'application $x \longrightarrow (x/2 + 1/x)$ de $[1, \longrightarrow[$ dans lui-même; elle est contractante de rapport 1/2 et son point fixe est $\sqrt{2}$. Le fait que $f'(\sqrt{2}) = 0$ rend particulièrement rapide la convergence du procédé.

Nous verrons d'autres applications de ce théorème à la théorie des fonctions implicites, et à la résolution des équations différentielles; toutefois il est commode, pour ces applications, de préciser le théorème 21-*2* en introduisant un paramètre :

THÉORÈME **21**-*5*. — *Soient* L *un espace topologique,* E *un espace métrique complet, et* f *une application continue de* L × E *dans* E *telle que, pour tout* $\lambda \in$ L *l'application* $x \longrightarrow f(\lambda, x)$ *de* E *dans* E *soit contractante de rapport* k (*où* $k < 1$ *ne dépend pas de* λ).

Si pour tout λ *on désigne par* a_λ *le point* x *de* E *tel que* $x = f(\lambda, x)$, *l'application* $\lambda \longrightarrow a_\lambda$ *de* L *dans* E *est continue.*

DÉMONSTRATION. — Soit $\lambda_0 \in$ L; on va montrer que l'application $\lambda \longrightarrow a_\lambda$ est continue au point λ_0.

Soit $\varepsilon > 0$; comme f est continue, il existe un voisinage V de λ_0 tel que, pour tout $\lambda \in$ V on ait :

$$d(f(\lambda, a_{\lambda_0}), f(\lambda_0, a_{\lambda_0})) \leqslant \varepsilon .$$

Or l'inégalité triangulaire donne :

$$d(a_\lambda, a_{\lambda_0}) = d(f(\lambda, a_\lambda), f(\lambda_0, a_{\lambda_0}))$$
$$\leqslant d(f(\lambda, a_\lambda), f(\lambda, a_{\lambda_0})) + d(f(\lambda, a_{\lambda_0}), f(\lambda_0, a_{\lambda_0})) \leqslant k\, d(a_\lambda, a_{\lambda_0}) + \varepsilon$$

d'où $$d(a_\lambda, a_{\lambda_0}) \leqslant \varepsilon/(1-k) \text{ pour tout } \lambda \in \mathrm{V}.$$

REMARQUE. — On n'a, en fait, utilisé que la continuité partielle de f par rapport à λ. Mais cette remarque ne permet pas d'affaiblir les hypothèses, car toute application f de L × E dans E qui est partiellement continue par rapport à λ et qui est lipschitzienne de rapport k par rapport à x est continue sur L × E; c'est immédiat à partir de l'inégalité :

$$d(f(\lambda, x), f(\lambda_0, x_0)) \leqslant d(f(\lambda, x), f(\lambda, x_0)) + d(f(\lambda, x_0), f(\lambda_0, x_0))$$
$$\leqslant k\, d(x, x_0) + d(f(\lambda, x_0), f(\lambda_0, x_0)) .$$

Cette dernière expression tend évidemment vers 0 lorsque $x \longrightarrow x_0$ et $\lambda \longrightarrow \lambda_0$.

22. — Convergence simple et convergence uniforme

Les espaces topologiques les plus utiles en Analyse sont les espaces fonctionnels, c'est-à-dire des espaces dont les éléments sont des fonctions. On

peut, dans un tel espace, parler de la convergence de fonctions vers une autre fonction, en un sens défini par la topologie de l'espace. Inversement, lorsqu'on désire étudier certains caractères donnés d'un ensemble de fonctions données, il est souvent commode de mettre sur cet ensemble une topologie adaptée à l'étude de ces caractères.

Voici quelques exemples de telles situations :

Soit E l'ensemble des fonctions numériques sur [0, 1] qui ont des dérivées de tous les ordres. C'est un espace vectoriel; si l'on veut étudier des propriétés liées à cette structure vectorielle, on imposera à la topologie de E d'être compatible en un certain sens avec la structure d'espace vectoriel. En particulier, si on cherche une topologie définie par une distance, celle-ci devra être invariante par les translations de E ; il suffira donc de définir la distance entre l'élément 0 de E et un élément quelconque f ; on notera $p(f)$ cette dernière distance.

1° Si maintenant on désire exprimer que la fonction $x \longrightarrow f(x)$ est voisine de 0 lorsqu'elle est petite pour tout x, on posera

$$p(f) = \sup_{x \in E} |f(x)|.$$

2° Si par contre on veut seulement exprimer que f est petite « en moyenne », on posera

$$p(f) = \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

ou, si l'on cherche à éviter davantage les grandes valeurs de $f(x)$.

$$p(f) = \left(\int_0^1 f^2(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

3° On peut désirer, au contraire, exprimer le fait que f, non seulement est petite partout, mais aussi n'oscille pas trop.

Suivant les besoins, on posera

$$p(f) = |f(0)| + \text{Variation totale de } f \text{ sur } [0, 1]$$

ou

$$p(f) = |f(0)| + \sup |f'(x)|.$$

4° Si l'on veut exprimer le fait que toutes les dérivées jusqu'à l'ordre n sont petites, on posera

$$p(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \dots + |f^{(n-1)}(0)| + \sup_x |f^{(n)}(x)|.$$

Nous reviendrons en détail sur ces procédés lors de l'étude des espaces normés. Pour l'instant nous allons seulement étudier brièvement deux des modes de convergence les plus utilisés.

Convergence simple. — Soit X un ensemble, muni ou non d'une topologie, et soit Y un espace topologique. Soit f une application de X dans Y, et soit (f_n) une suite d'applications de X dans Y.

Définition 22-*1*. — ON DIT QUE LA SUITE (f_n) *CONVERGE SIMPLEMENT* VERS f SI, POUR TOUT $x \in X$, LA SUITE $(f_n(x))$ CONVERGE VERS $f(x)$.

EXEMPLES. — 1° Soit f_n l'application $x \longrightarrow x^n$ de $[0, 1]$ dans **R**. Cette suite converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = 0 \text{ si } x \neq 1 \qquad \text{et} \qquad f(1) = 1.$$

2° Soit f_n l'application $x \longrightarrow nx/(1 + |nx|)$ de **R** dans **R**. Cette suite converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = -1 \text{ si } x < 0; \qquad f(x) = 1 \text{ si } x > 0; \qquad f(0) = 0.$$

3° Soit f_n l'application $x \longrightarrow 1/[1 + (x-n)^2]$ de **R** dans **R**. Cette suite converge simplement vers $f = 0$.

Plus généralement, il est commode de pouvoir parler de convergence simple d'une famille de fonctions :

Définition 22-*2*. — SOIT $(f_\iota)_{\iota \in I}$ UNE FAMILLE D'APPLICATIONS DE X DANS Y, ET SOIT $\mathscr{B}$ UNE BASE DE FILTRE SUR I. ON DIT QUE LA FAMILLE CONVERGE *SIMPLEMENT* VERS f SUIVANT $\mathscr{B}$ SI, POUR TOUT $x \in X$, $f_\iota(x)$ CONVERGE VERS $f(x)$ SUIVANT $\mathscr{B}$.

EXEMPLES. — 1° On peut reprendre les exemples précédents en remplaçant l'entier n par un nombre quelconque, et en prenant pour $\mathscr{B}$ la base de filtre sur **R** constituée par les intervalles $[\alpha, \longrightarrow[$.

2° Soit f une fonction numérique dérivable définie sur **R**. La famille (g_α) (où $\alpha \in \mathbf{R}^*$) des fonctions définies par

$$g_\alpha(x) = (f(x+\alpha) - f(x))/\alpha$$

converge simplement vers la fonction dérivée f' quand α tend vers 0 (autrement dit suivant la base de filtre $\mathscr{B}$ constituée par les traces sur $\mathbf{R}^*$ des voisinages de 0 dans **R**).

3° Soit $f_{p,q}$ l'application de $\mathbf{R}^2$ dans **R** définie par

$$f_{p,q}(x, y) = e^{-px^2 - qy^2} \qquad \text{où } (p, q \in \mathbf{N}).$$

La suite double $f_{p,q}$ converge simplement vers la fonction f (où $f = 1$ à l'origine, et 0 partout ailleurs) lorsque p et $q \to \infty$.

Z Nous avons défini la convergence simple sans utiliser de topologie sur l'ensemble des applications de X dans Y ; en fait il y a bien une topologie sous-jacente sur cet ensemble (voir exercice 107) appelée topologie de la convergence simple, mais nous n'aurons pas l'occasion de l'utiliser explicitement.

Il est utile de noter ici que cette topologie ne peut pas être en général définie par une distance : Soit (f_n) une suite de fonctions numériques sur $[0, 1]$ qui converge simplement vers f ; lorsque chaque f_n est elle-même limite simple d'une suite $(f_{n,p})$, on pourrait imaginer que f est limite simple d'une suite

convenablement choisie de fonctions prises parmi les $f_{n,p}$. Il est immédiat que ceci aurait lieu si la topologie de la convergence simple était métrisable (voir exercice 67); mais des exemples simples montrent que ceci n'a pas lieu; cette topologie n'est donc pas métrisable (voir aussi exercice 107).

Convergence uniforme. — Soit à nouveau X un ensemble quelconque, muni ou non d'une topologie, et soit Y un espace que nous supposerons maintenant *métrique*; on désigne encore par f et f_n des applications de X dans Y.

Définition 22-3. — ON DIT QUE LA SUITE (f_n) *CONVERGE UNIFORMÉMENT* VERS f (OU ENCORE QUE f EST LIMITE UNIFORME DES f_n) SI, POUR TOUT $\varepsilon > 0$, IL EXISTE UN ENTIER n_0 TEL QUE, POUR TOUT $n \geqslant n_0$ ET POUR TOUT $x \in X$, ON AIT $d(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon$.

On définirait de la même façon la convergence uniforme d'une famille (f_i) vers f, suivant une base de filtre $\mathscr{B}$; cette définition deviendra d'ailleurs inutile lorsque nous aurons défini la topologie de la convergence uniforme.

Z Toute suite f_n qui converge uniformément vers f converge simplement vers f, mais il est essentiel de remarquer que la réciproque est inexacte. En voici plusieurs exemples :

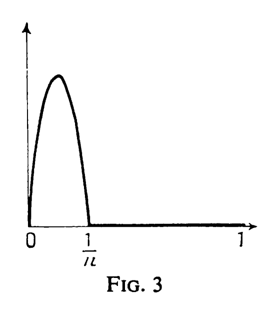


FIG. 3

1° Soit f_n la fonction numérique continue définie sur $X = [0, 1]$ par les conditions :

$$f_n(x) = n^2 x(1-nx) \text{ sur } [0, 1/n]$$
$$f_n(x) = 0 \qquad \text{ sur } [1/n, 1].$$

On vérifie aisément que la suite f_n converge simplement vers la fonction $f = 0$, mais cette convergence n'est pas uniforme puisque

$$\sup |f_n(x) - f(x)| = n/4,$$

loin de tendre vers 0, tend vers $+\infty$.

2° Dans aucun des trois exemples qui illustrent la convergence simple, la convergence n'est uniforme ; cela est particulièrement net dans les deux premiers, du fait que la limite f n'est pas continue ; dans le troisième exemple, il y a convergence uniforme sur tout intervalle borné, mais pas sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Métrique et topologie de la convergence uniforme. — L'étude de la convergence uniforme peut être simplifiée par l'introduction d'un écart sur l'ensemble $\mathscr{F}(X, Y)$ des applications de X dans Y.

Soient f, g deux applications d'un ensemble X dans un espace métrique Y, et posons

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d\big(f(x), g(x)\big).$$

C'est un nombre fini ou $+\infty$; d'après l'étude antérieure des écarts sur un ensemble, pour tout $x \in X$,

$$d_x(f, g) = d\big(f(x), g(x)\big)$$

est un écart sur $\mathscr{F}$ (X, Y), et

$$d(f, g) = \sup d_x(f, g)$$

est aussi un écart. En outre

$$(f \neq g) \implies \big(d(f, g) \neq 0\big).$$

Lorsque Y a un diamètre fini, $d(f, g)$ est toujours fini, donc d est une distance sur $\mathscr{F}$ (X, Y); lorsque Y est quelconque, il est parfois commode de remplacer l'écart d par $\inf(d, 1)$, qui est une distance et qui définit sur $\mathscr{F}$ (X, Y) la même topologie et la même structure uniforme que d.

La topologie sur $\mathscr{F}$ (X, Y) associée à l'écart d s'appelle *topologie de la convergence uniforme*; cette terminologie est justifiée par la proposition suivante :

PROPOSITION 22-4. — *Dire qu'une suite* (f_n) *d'applications de* X *dans* Y *converge uniformément vers l'application* f, *équivaut à dire que, dans l'espace* $\mathscr{F}$(X, Y) *muni de la topologie de la convergence uniforme, la suite des points* f_n *converge vers le point* f.

En effet, dire que la suite des fonctions f_n converge uniformément vers f équivaut à dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a dès que n est assez grand :

$$d\big(f(x), f_n(x)\big) \leqslant \varepsilon \text{ pour tout } x \in X,$$

ce qui équivaut encore à dire que $d(f, f_n) \leqslant \varepsilon$.

Interprétation de la convergence uniforme sur les graphes. — L'utilisation des graphes des applications f de X dans Y fournit une interprétation intuitive commode de la convergence uniforme :

Soit $B(f, \varepsilon)$ l'ensemble des points (x, y) de $X \times Y$ tels que

$$d\big(y, f(x)\big) \leqslant \varepsilon;$$

cet ensemble constitue une sorte de *tube* de rayon ε autour du graphe de f.

Dire que $d(f, g) \leqslant \varepsilon$ équivaut à dire que

$$d\big(f(x), g(x)\big) \leqslant \varepsilon$$

pour tout $x \in X$, ou encore à dire que le graphe de g est contenu dans $B(f, \varepsilon)$.

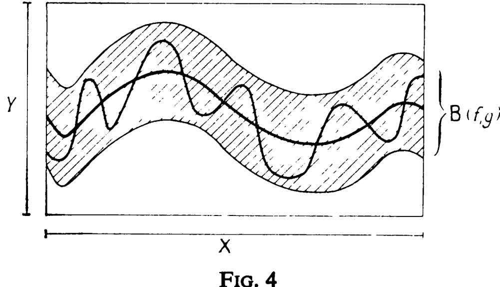


FIG. 4

Dire que la suite (f_n) converge uniformément vers f revient à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, tous les f_n à partir d'un certain rang ont leur graphe dans $B(f, \varepsilon)$.

On aperçoit mieux maintenant la raison pour laquelle, dans l'exemple 1 ci-dessus, les f_n ne convergent pas uniformément vers 0 : Pour tout $\varepsilon < 1/4$, le graphe d'aucun f_n n'est contenu dans $B(0, \varepsilon)$.

Cas des espaces complets. — L'introduction de l'écart d sur $\mathcal{F}(X,Y)$ permet de parler de suites de Cauchy de fonctions, et d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME **22-5**. — *Lorsque l'espace métrique* Y *est complet, l'espace* $\mathcal{F}(X, Y)$ *est aussi complet.*

DÉMONSTRATION. — Soit (f_n) une suite de Cauchy de $\mathcal{F}(X, Y)$. Pour tout $x \in X$, l'inégalité $d(f_p(x), f_q(x)) \leqslant d(f_p, f_q)$ montre que la suite $(f_n(x))$ de points de Y est une suite de Cauchy. Comme Y est complet, elle possède une limite que nous noterons $f(x)$.

Or, f_n étant une suite de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n(\varepsilon)$ tel que, pour tous p et $q \geqslant n(\varepsilon)$, et pour tout $x \in X$, on ait :

$$d(f_p(x), f_q(x)) \leqslant \varepsilon .$$

Si dans cette inégalité on laisse x et p fixes et que $q \longrightarrow \infty$, $f_q(x)$ tend vers $f(x)$, et on obtient l'inégalité :

$$d(f_p(x), f(x)) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad p \geqslant n(\varepsilon).$$

Il résulte de cette inégalité que $d(f_p, f) \leqslant \varepsilon$, donc la suite f_n converge vers f dans l'espace $\mathcal{F}(X, Y)$ muni de l'écart d.

Donc cet espace est bien complet.

COROLLAIRE **22-6**. — *Tout espace métrique* E *peut être complété; en ce sens qu'il existe un espace métrique complet* $\hat{E}$ *et une isométrie* f *de* E, *sur une partie de* $\hat{E}$, *telle que* $f(E)$ *soit partout dense dans* $\hat{E}$.

En effet, désignons par f l'application de E dans $\mathscr{F}(E, \mathbf{R})$, qui à tout $a \in E$ associe l'élément f_a de $\mathscr{F}(E, \mathbf{R})$ défini par $f_a(x) = \delta(a, x)$, où δ désigne la distance dans E.

Les relations :

$$|\delta(a, x) - \delta(b, x)| \leqslant \delta(a, b) \qquad \text{et} \qquad |\delta(a, b) - \delta(b, b)| = \delta(a, b)$$

montrent que dans $\mathscr{F}(E, \mathbf{R})$ on a :

$$d(f_a, f_b) = \delta(a, b) \qquad \text{pour tous } a, b \in E.$$

Donc l'application f est une isométrie de E sur $f(E)$. L'espace $\hat{E}$ cherché n'est autre que la fermeture de $f(E)$ dans l'espace complet $\mathscr{F}(E, \mathbf{R})$.

On vérifiera aisément que la complétion de E est unique à un isomorphisme près en ce sens que si l'on a deux complétions $(\hat{E}, f)$ et $(\hat{E}', f')$ de E, l'isométrie $f' \circ f^{-1}$ de $f(E)$ sur $f'(E)$ se prolonge de façon unique en une isométrie de $\hat{E}$ sur $\hat{E}'$.

Conservation de la continuité par convergence uniforme. — Supposons maintenant que X soit un espace topologique, Y étant toujours un espace *métrique*. On peut alors parler de la continuité d'une application de X dans Y. Nous allons voir que ce caractère se conserve par convergence uniforme.

THÉORÈME **22**-7. — *Soit f_n une suite d'applications de* X *dans* Y, *qui converge uniformément vers f, et soit a un point de* X.

Si toutes les f_n sont continues en a, f est aussi continue en a.

DÉMONSTRATION. — Donnons-nous un nombre $\varepsilon > 0$. Comme la convergence des f_n est uniforme, il existe un entier n_0 tel que,

$$d(f(x), f_{n_0}(x)) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad x \in X.$$

Comme f_{n_0} est continue en a, il existe un voisinage V de a tel que

$$d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad x \in V.$$

Il en résulte que, pour tout $x \in V$, on a :

$$d(f(x), f(a)) \leqslant d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) + d(f_{n_0}(a), f(a)) \leqslant 3\,\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, cette inégalité démontre la continuité de f en a.

COROLLAIRE **22**-8. — *Si les f_n sont continues dans* X *et convergent uniformément vers f, la fonction f est aussi continue dans* X.

COROLLAIRE **22**-9. — *Soit f_n une suite d'applications continues de* X *métrique dans* Y *métrique. Si pour tout compact* K *de* X *la restriction des f_n à* K *converge uniformément, la suite (f_n) converge sur* X *et sa limite f est continue.*

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent et du corollaire **16**-*8*.

Nous aurons souvent à utiliser ce corollaire.

Z Le théorème 22-*7* et ses corollaires s'étendent immédiatement aux limites uniformes de familles de fonctions continues suivant une base de filtre.

Par contre il faut noter ici que le théorème 22-*7* ne s'étend pas à la convergence simple :

Lorsqu'une suite f_n de fonctions continues converge simplement vers une fonction f, celle-ci possède certains caractères de régularité, mais elle n'est pas toujours continue. Par exemple la suite des monômes $f_n(x) = x^n$ converge simplement sur [0, 1] vers une fonction f égale à 0 sur [0, 1 [et à 1 pour $x = 1$.

Espace $\mathscr{C}$ **(X, Y).** — Nous noterons $\mathscr{C}$ (X, Y) le sous-espace de $\mathscr{F}$ (X, Y) constitué par les applications continues de l'espace topologique X dans l'espace métrique Y. Il résulte du théorème précédent que $\mathscr{C}$ (X, Y) est un sous-ensemble *fermé* de $\mathscr{F}$ (X, Y) muni de la topologie de la convergence uniforme; lorsque ce dernier est complet, $\mathscr{C}$ (X, Y) est également complet. On peut donc énoncer :

THÉORÈME **22**-*10*. — *Lorsque* Y *est complet, dans* $\mathscr{F}$ (X, Y) *muni de l'écart de la convergence uniforme, le sous-espace* $\mathscr{C}$ (X, Y) *constitué par les applications continues est complet.*

REMARQUE. — Même en imposant à X et Y des hypothèses de régularité très restrictives, l'espace $\mathscr{C}$ (X, Y) n'est en général pas compact.

Par exemple, supposons X et Y compacts et identiques à l'intervalle [0, 1]. L'ensemble $\mathscr{C}$ (X, Y) n'est donc autre que l'ensemble des fonctions numériques continues définies sur [0, 1] et à valeurs dans [0, 1].

Avec la métrique choisie sur $\mathscr{C}$ (X, Y) cet espace est complet, mais non compact ou même localement compact. Par exemple l'élément O de cet espace n'a aucun voisinage compact puisque, pour tout $k > 0$, la suite (f_n) définie par $f_n(x) = k \sin^2 nx$, ne contient aucune suite partielle convergente.

Convergence uniforme sur un ensemble de parties. — La suite des fonctions numériques $x \longrightarrow 1/[1 + (x - n)^2]$ converge simplement vers la fonction O; mais cette convergence n'est pas uniforme; par contre, pour tout intervalle $[a, b]$ de **R**, les restrictions de ces fonctions à $[a, b]$ convergent uniformément vers 0.

Plus généralement, le corollaire 22-*9* montre l'intérêt de la convergence uniforme sur tout compact.

C'est là un cas particulier d'une notion générale importante.

Définition 22-*11*. — SOIT X UN ENSEMBLE QUELCONQUE; SOIT Y UN ESPACE MÉTRIQUE, ET SOIT $\mathscr{A}$ UN ENSEMBLE DE PARTIES DE X. DÉSIGNONS PAR f, f_n DES APPLICATIONS DE X DANS Y.

ON DIT QUE LES f_n CONVERGENT UNIFORMÉMENT VERS f SUR TOUT $A \in \mathscr{A}$ SI POUR TOUT $A \in \mathscr{A}$, LES RESTRICTIONS DES f_n À A CONVERGENT UNIFORMÉMENT VERS LA RESTRICTION DE f À A.

EXEMPLES. — 1° Si $\mathscr{A}$ a pour seul élément X, on retrouve la convergence uniforme.

2° Si $\mathscr{A}$ est l'ensemble des parties de X réduites à un point, on retrouve la convergence simple.

3° Si $\mathscr{A}$ est l'ensemble des compacts de X, on obtient la convergence uniforme sur tout compact.

Relation entre convergence uniforme et convergence simple. — Plusieurs exemples nous ont montré que la convergence simple d'une suite de fonctions n'entraîne pas nécessairement sa convergence uniforme. Voici pourtant un cas important dans lequel ceci est vrai :

LEMME 22-*12*. — *Soit* X *un espace compact, et soient* f, f_n *(où* $n = 1, 2, \ldots$*) des applications continues de* X *dans un espace métrique* Y.

Si pour tout $x \in X$, *la suite des distances* $d\big(f(x), f_n(x)\big)$ *est décroissante et tend vers* 0, *la convergence des* f_n *vers* f *est uniforme.*

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $X_n = \{x : d\big(f(x)\big), f_n(x) \geqslant \varepsilon\}$ est fermé ; la suite des X_n est décroissante, et son intersection est vide.

Il existe donc un n_0 tel que $(n \geqslant n_0)$ entraîne $\big(d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon\big)$, ce qui traduit la convergence uniforme des f_n vers f.

COROLLAIRE 22-*13* (APPELÉ THÉORÈME DE DINI). — *Si* X *est un espace compact, si* f *et* $f_n \in \mathscr{C}(X, \mathbf{R})$, *et si la suite* (f_n) *est monotone et converge simplement vers* f, *la convergence est uniforme.*

On applique le lemme, en remarquant simplement que la suite des $|f(x) - f_n(x)|$ est décroissante et tend vers 0.

Z C'est la suite f_n qui est monotone, et non pas chacune des f_n ; d'ailleurs cette dernière interprétation ne pourrait avoir de sens que si X était muni d'un ordre, par exemple si $X = [0, 1]$.

Cependant cette confusion ne conduirait pas à une erreur; on peut en effet vérifier que si une suite quelconque (f_n) de fonctions numériques monotones sur un intervalle $[a, b]$ converge simplement vers une fonction continue, la convergence est uniforme (voir exercice 85).

23. — Espaces de fonctions équicontinues

Malgré l'intérêt que présentent les espaces complets mis en évidence par les théorèmes précédents, il est souvent précieux de pouvoir disposer d'espaces fonctionnels compacts. La notion d'*équicontinuité* va nous en fournir une classe importante.

Définition 23-*1*. — SOIENT X UN ESPACE TOPOLOGIQUE, Y UN ESPACE MÉTRIQUE, ET E UNE PARTIE DE $\mathscr{F}(X, Y)$.

1° SOIT $a \in X$. ON DIT QUE E EST *ÉQUICONTINUE AU POINT* a SI POUR TOUT $\varepsilon > 0$, IL EXISTE UN VOISINAGE V DE a TEL QUE L'ON AIT POUR TOUTE $f \in E$:

$$\delta\big(f(V)\big) < \varepsilon .$$

2° LORSQUE DE PLUS E EST MÉTRIQUE, ON DIT QUE E EST *UNIFORMÉMENT ÉQUICONTINUE* (OU ENCORE *ÉGALEMENT CONTINUE*) SI POUR TOUT $\varepsilon > 0$, IL EXISTE UN $\eta > 0$, TEL QUE POUR TOUTE $f \in E$, $\big(d(x, y) < \eta\big)$ ENTRAÎNE

$$\big(d(f(x), f(y)) < \varepsilon\big) .$$

Dire que E est uniformément équicontinue équivaut évidemment à dire qu'il existe un module de continuité φ commun à toutes les f de E.

Si E est uniformément équicontinue, non seulement elle est équicontinue, mais toute $f \in E$ est uniformément continue.

EXEMPLES **23-*2*.** — 1° Si f désigne une application continue de X dans Y, l'ensemble $\{f\}$ est équicontinu partout, mais n'est uniformément équicontinu que si f est uniformément continue.

2° Soit E l'ensemble des applications $x \longrightarrow x^n$ de $[0, 1]$ dans lui-même. Chacune des f est uniformément continue, et E est équicontinu en tout point de $[0, 1[$, mais E n'est pas uniformément équicontinu.

3° Si X et Y sont métriques, l'ensemble E_k (où $k > 0$) des applications lipschitziennes de rapport k, de X dans Y, est uniformément équicontinu.

4° Soient X, I deux espaces métriques compacts, et soit f une application continue de $X \times I$ dans un espace métrique Y. L'ensemble E des applications partielles $f_i : x \longrightarrow f(x, i)$ de X dans Y est uniformément équicontinu. C'est une conséquence immédiate de l'uniforme continuité de f sur $X \times I$.

PROPOSITION 23-*3*. — *Soit* X *un espace métrique compact, et soit* Y *un espace métrique. Toute partie équicontinue* E *de* $\mathscr{F}$ (X, Y) *est uniformément équicontinue.*

DÉMONSTRATION. — Soit $\varepsilon > 0$; si E est équicontinu, pour tout $x \in X$ il existe un ouvert ω_x contenant x tel que $\delta\big(f(\omega_x)\big) < \varepsilon$ pour toute $f \in E$. D'après le lemme 18-*1*, il existe donc un nombre $\rho > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon ρ dans X soit contenue dans l'un des ω_x ; autrement dit $\big(d(x, y) < \rho\big)$ entraîne $d\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$.

***Interprétation de l'égale continuité* 23-*4*.**

Dire que E est un ensemble également continu de fonctions équivaut à dire qu'il existe un module de continuité φ commun à toutes les $f \in E$.

Soit alors $\alpha > 0$ quelconque, et soit A une partie de X qui soit α-dense en ce sens que, pour tout $x \in X$, on ait $d(x, A) < \alpha$. Pour toute $f \in E$, la relation $d(x_1, x_2) \leqslant \alpha$ entraîne

$$d\big(f(x_1), f(x_2)\big) \leqslant \varphi(\alpha);$$

donc la connaissance de la restriction de f à A entraîne la connaissance de f sur X à $\varphi(\alpha)$ près.

Autrement dit, les fonctions f de E ont une certaine « rigidité » que mesure leur module de continuité φ.

Par exemple, une fonction numérique et lipschitzienne de rapport k sur [0, 1] est connue à k/n près partout dès que $f(1/n)$, $f(2/n)$, ..., $f(p/n)$, ... sont connus.

Toutes les conséquences de l'égale continuité résultent de cette « rigidité ».

THÉORÈME 23-*5* (D'ASCOLI). — *Soient* X *et* Y *deux espaces métriques compacts et soit* E *une partie de l'espace* $\mathscr{C}$ (X, Y) *muni de la topologie de la convergence uniforme.*

Dire que E *est également continu équivaut à dire que* E *est relativement compact dans* $\mathscr{C}$ (X, Y).

DÉMONSTRATION. — 1° On suppose E également continu; pour montrer que $\overline{E}$ est compact, il suffit, d'après le corollaire du théorème 18-*2*, de démontrer que toute suite infinie S d'éléments de E contient une suite partielle qui converge dans $\mathscr{C}$ (X, Y); comme $\mathscr{C}$ (X, Y) est complet (puisque Y l'est), il suffit même de montrer que S contient une suite partielle de Cauchy.

Soit φ un module de continuité commun à toutes les $f \in E$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de X par des boules ouvertes de rayon ε et de centres x_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

Comme Y est compact, on peut extraire de S une sous-suite $S_1(\varepsilon)$ telle que, pour toutes f et $g \in S_1(\varepsilon)$, on ait :

(1) $$d_Y(f(x), g(x)) \leqslant \varphi(\varepsilon) \quad \text{au point} \quad x = x_1 .$$

De cette suite $S_1(\varepsilon)$ on peut extraire une suite $S_2(\varepsilon)$ possédant la même propriété au point x_2; et ainsi de suite. Au bout de n opérations, on aura construit une sous-suite $S_n(\varepsilon)$ vérifiant l'inégalité (1) en chacun des points x_i ($i = 1, 2, ..., n$); on la désignera par $S(\varepsilon)$.

Or par construction, pour tout $x \in X$, il existe un point x_i tel que

$$d_X(x, x_i) \leqslant \varepsilon ,$$

ce qui entraîne $$d_Y(f(x), f(x_i)) \leqslant \varphi(\varepsilon) \text{ pour toute } f \in S.$$

Pour toutes f, $g \in S(\varepsilon)$ on a donc,

$$d_Y(f(x), g(x)) \leqslant d_Y(f(x), f(x_i)) + d_Y(f(x_i), g(x_i)) + d_Y(g(x_i), g(x)) \leqslant 3\,\varphi(\varepsilon),$$

autrement dit on a

(2) $$d(f, g) \leqslant 3\,\varphi(\varepsilon).$$

On a donc mis en évidence un procédé qui associe à toute suite S une sous-suite $S(\varepsilon)$ dont deux éléments quelconques f, g vérifient la relation (2).

Il suffit d'itérer ce procédé en donnant à ε les valeurs successives ($1, 1/2, ..., 1/n, ...$) pour obtenir les suites successives :

$$S,\ S(1),\ S(1, 1/2), ...,\ S(1, 1/2, ..., 1/n), ...$$

dont chacune est sous-suite de la précédente.

Comme les $\varphi(1/n)$ ont pour limite 0, la suite diagonale de cette suite de suites est une suite de Cauchy. C'est la suite cherchée.

2° Soit E un sous-ensemble compact de $\mathscr{C}(X, Y)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite finie (f_1, f_2, ..., f_n) de points de E telle que les boules ouvertes $B(f_i, \varepsilon)$ constituent un recouvrement ouvert de E Pour chacune de ces f_i, il existe un $\eta_i > 0$ tel que l'inégalité

$$d_X(x_1, x_2) < \eta_i$$

entraîne $$d_Y(f_i(x_1), f_i(x_2)) < \varepsilon .$$

Soit η le plus petit de ces η_i; pour toute $f \in E$ on a donc, en remarquant que f appartient à une boule $B(f_i, \varepsilon)$:

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant 3\,\varepsilon$$

dès que $$d_X(x_1, x_2) \leqslant \eta.$$

Autrement dit E est un ensemble également continu.

Z Le théorème 23-5 ne s'étend pas au cas où, soit X, soit Y, est localement compact mais non compact.

Par exemple l'ensemble E des applications constantes de [0, 1] dans **R** est évidemment également continu ; cependant il n'est pas relativement compact.

De même l'ensemble des applications $x \longrightarrow 1/[1+(x-n)^2]$ de **R** dans [0, 1] est également continu, mais il n'est pas relativement compact.

Exemple. — L'ensemble des applications lipschitziennes de rapport k, de l'intervalle [0, 1] dans un intervalle $[a, b]$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme.

Remarque 23-*6*. — Plus généralement, si X est métrique compact et Y métrique quelconque, et si E est une partie de $\mathscr{C}(X, Y)$ muni de la métrique uniforme, dire que E est relativement compact équivaut à dire que E est également continu et que $\bigcup_{f \in E} f(X)$ est relativement compact, c'est-à-dire que les f de E prennent leurs valeurs dans un même compact de Y : Cette équivalence est une conséquence facile du théorème d'Ascoli.

24. — Variation totale et longueur

Les notions que nous avons étudiées jusqu'ici, continuité, continuité uniforme, convergence uniforme, n'ont pas un caractère métrique, même lorsqu'il est commode d'utiliser une distance pour les étudier.

Par contre la variation totale que nous allons définir présente un caractère essentiellement métrique.

Soit T un ensemble totalement ordonné (qui va jouer le rôle d'ensemble de paramétrage) et soit f une application de T dans un espace métrique E ; pour abréger les notations, on désignera par $|xy|$ la distance de deux points x, y de E

Définition 24-*1*. — Pour toute partie finie σ de T, on appelle variation totale de f sur σ le nombre

$$V_\sigma = \sum_i |f(t_i), f(t_{i+1})|,$$

où les t_i $(t_1 < t_2 \dots < t_n)$ désignent les points de σ.

L'inégalité triangulaire montre aussitôt que $(\sigma \subset \sigma') \Longrightarrow (V_\sigma \leqslant V_{\sigma'})$; autrement dit V_σ est fonction croissante de σ. Il est donc naturel de poser la définition suivante :

Définition 24-*2*. — Pour tout $A \subset T$, on appelle *variation totale* de f sur A le nombre positif, fini ou infini, V_A, ainsi défini :

$$V_A = \sup V_\sigma \text{ (pour tous les } \sigma \text{ finis} \subset A).$$

Lorsque $V_A < \infty$, on dit que f est a *variation bornée* sur A.

Il est évident que V_A est fonction croissante de A.

En particulier, si T a un premier point α et un dernier point β, on a

$$V_T \geqslant V_{\{\alpha, \beta\}} \text{ ou encore } V_T \geqslant |f(\alpha) f(\beta)|.$$

EXEMPLES. — 1° Soit f une application *croissante* de T dans **R**.

La relation $V_\sigma = \Sigma\,(f(t_{i+1}) - f(t_i)) = f(t_n) - f(t_1)$

montre que si T a un premier point α et un dernier point β,

$$V_T = f(\beta) - f(\alpha).$$

Si f est décroissante $V_T = |f(\beta) - f(\alpha)|$.

2° Soit f une application lipschitzienne de rapport k, de l'intervalle $[a, b]$ de **R** dans un espace métrique E.

Pour tout $\sigma = \{t_i\} \subset [a, b]$, on a

$$V_\sigma \leqslant k\,\Sigma\,(t_{i+1} - t_i) \leqslant k(b-a).$$

Donc $$V_{[a,b]} \leqslant k(b-a).$$

PROPOSITION 24-3. — *La variation totale est additive en ce sens que, pour tout $x \in$ T, si l'on pose*

$$T_1 = (\,]\leftarrow, x]\,) \cap T \quad \text{et} \quad T_2 = (\,[x, \rightarrow[\,) \cap T,$$

on a $$V_T = V_{T_1} + V_{T_2}$$

En effet, comme V_σ est fonction croissante de σ, on a aussi

$$V_T = \sup V_\sigma, \text{ pour tous les } \sigma \text{ finis contenant } x.$$

Or un tel σ fini n'est autre chose que la réunion d'un σ_1 quelconque de T_1 contenant x, et d'un σ_2 quelconque de T_2 contenant x.

Or $$V_\sigma = V_{\sigma_1} + V_{\sigma_2};$$

on a donc $V_T = \sup V_\sigma = \sup(V_{\sigma_1} + V_{\sigma_2}) = \sup V_{\sigma_1} + \sup V_{\sigma_2} = V_{T_1} + V_{T_2}$.

Définition 24-4. — SOIENT T, T′ DEUX ENSEMBLES TOTALEMENT ORDONNÉS ; ET SOIENT f, f' DEUX APPLICATIONS DE T, T′, RESPECTIVEMENT, DANS E. ON DIT QUE f, f' SONT ÉQUIVALENTES S'IL EXISTE UNE BIJECTION CROISSANTE φ DE T′ SUR T TELLE QUE $f' = f \circ \varphi$.

Une telle relation est évidemment réflexive, symétrique et transitive. donc c'est une relation d'équivalence.

PROPOSITION 24-5. — *Si f et f' sont équivalentes, les variations totales* V, V′ *de f et f' sur* T *et* T′ *respectivement, sont égales.*

En effet, pour tous $x', y' \in$ T′ on a :

$$|f'(x') f'(y')| = |f(\varphi(x')) f(\varphi(y'))|;$$

donc pour tout $\sigma' \subset T'$, la variation totale de f' sur σ' est égale à la variation totale de f sur $\sigma = \varphi(\sigma')$.

Il en résulte que $V' \leqslant V$; de la même façon $V \leqslant V'$, d'où l'égalité.

Courbes paramétrées. — Désormais nous ne considérerons plus que le cas où T est un intervalle $[a, b]$ de **R** et où f est continue; dans ce cas on dit que le couple (T, f) est une *courbe paramétrée* ou un *chemin*, et on appelle V_T la *longueur* de cette courbe; lorsque cette longueur est finie on dit que la courbe est *rectifiable*

Pour toute partie finie σ de T, avec

$$\sigma = \{ t_1, t_2, \ldots, t_n \}, \text{ où } a = t_1 < t_2 \ldots < t_n = b,$$

on appelle *module de* σ le nombre

$$\mu(\sigma) = \sup_i | t_{i+1} - t_i | .$$

THÉORÈME **24**-6. — *Pour toute courbe paramétrée* (T, f), V_T *est la limite des* V_σ *lorsque le module* $\mu(\sigma)$ *tend vers* 0.

Autrement dit (en supposant $V_T < \infty$ pour fixer les idées), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$(\mu(\sigma) < \eta) \Longrightarrow (V_T - V_\sigma < \varepsilon) .$$

On énonce parfois ce théorème en disant que la longueur de la courbe est la limite des longueurs des *polygones inscrits* dans la courbe, en appelant ainsi tout couple (σ, f) où la partie finie σ de T contient a et b.

DÉMONSTRATION. — Nous supposerons $V_T < \infty$; la démonstration serait tout à fait analogue si $V_T = \infty$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe, d'après la définition de V_T, un σ_0 fini, $\sigma_0 = \{t_1, t_2, \ldots, t_{n_0}\}$ tel que

$$V_T - V_{\sigma_0} \leqslant \varepsilon .$$

Comme f est uniformément continue sur T, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que $|u - v| < \eta$ entraîne

$$|f(u) f(v)| < \varepsilon / n_0 ;$$

on supposera en outre que η est inférieur à la longueur du plus petit des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ associés à σ_0.

Soit alors un σ fini quelconque de T, de module $\mu(\sigma) < \eta$. Chacun des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ de σ_0 contient au moins un point de σ distinct de t_i et t_{i+1} ; désignons par t'_i (resp. t''_i) le plus grand (resp. petit) des points t de σ tels que $t < t_i$ (resp. $t > t_i$) ; et posons

$$f(t_i) = m_i ; \quad f(t'_i) = m'_i ; \quad f(t''_i) = m''_i .$$

$t'_i \quad t''_i$

$t_{i-1} \qquad t_i \qquad t_{i+1}$

FIG. 5

On a :

$$\mathrm{V}_{\sigma\cup\sigma_0} - \mathrm{V}_\sigma \leqslant \sum_i |m'_i m_i| + |m_i m''_i| - |m'_i m''_i| \leqslant \sum_i |m'_i m_i| + |m_i m''_i|$$
$$\leqslant 2(\varepsilon/n_0)\, n_0 = 2\varepsilon .$$

Les relations :

$$\mathrm{V}_\mathrm{T} - \mathrm{V}_{\sigma_0} \leqslant \varepsilon$$
$$\mathrm{V}_{\sigma_0} \leqslant \mathrm{V}_{\sigma\cup\sigma_0}$$
$$\mathrm{V}_{\sigma\cup\sigma_0} - \mathrm{V}_\sigma \leqslant 2\varepsilon$$

donnent par addition membre à membre

$$\mathrm{V}_\mathrm{T} - \mathrm{V}_\sigma \leqslant 3\varepsilon ;$$

c'est l'inégalité cherchée, au changement près de ε en 3ε.

COROLLAIRE **24-7**. — *Si* $\mathrm{V}_\mathrm{T} < \infty$, *l'application* $t \longrightarrow \mathrm{V}_{[a,t]}$ *de* T *dans* **R** *est croissante et continue.*

DÉMONSTRATION. — On se donne $\varepsilon > 0$; il existe alors un $\eta > 0$ tel que

$$(\mu(\sigma) < \eta) \Longrightarrow (\mathrm{V}_\mathrm{T} - \mathrm{V}_\sigma < \varepsilon)$$

et tel que $$(|y - x| < \eta) \Longrightarrow (|f(x) f(y)| < \varepsilon) .$$

Soient alors x, y deux points quelconques de $[a, b]$ tels que $0 \leqslant y - x \leqslant \eta$.

Il existe un σ contenant x, y mais aucun autre point de $[x, y]$, et de module $\mu(\sigma) < \eta$; désignons par σ_1 et σ_2 les traces de σ sur $[a, x]$ et $[y, b]$.

La relation $\mathrm{V}_\mathrm{T} < \mathrm{V}_\sigma + \varepsilon$ s'écrit :

$$\mathrm{V}_{[a,x]} + \mathrm{V}_{[x,y]} + \mathrm{V}_{[y,b]} = \mathrm{V}_{[a,b]} \leqslant \mathrm{V}_\sigma + \varepsilon = \mathrm{V}_{\sigma_1} + |f(x) f(y)| + \mathrm{V}_{\sigma_2} + \varepsilon$$
$$\leqslant \mathrm{V}_{[a,x]} + \varepsilon + \mathrm{V}_{[y,b]} + \varepsilon$$

d'où $\mathrm{V}_{[x,y]} < 2\varepsilon$ pour tous x, y tels que $|y - x| < \eta$.

L'énoncé qui suit concerne les espaces normés (voir 15-*3* et 15-*4*, chap. VI) mais on peut évidemment supposer que E est l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$.

COROLLAIRE **24-8**. — *Si* E *est un espace normé, et si l'application* f *a une dérivée continue, on a :*

$$\mathrm{V}_\mathrm{T} = \int_a^b \| f'(t) \| \, dt .$$

DÉMONSTRATION. — Donnons-nous $\varepsilon > 0$; comme f' est uniformément

continue, il existe $\eta > 0$ tel que si $0 < v-u < \eta$, on ait $\|f'(v)-f'(u)\| < \varepsilon$; la proposition 15-*3* du chapitre VI montre alors que :

$$\| f(v)-f(u)-(v-u)f'(u) \| < \varepsilon(v-u). \tag{1}$$

Soit alors σ fini $\subset$ T ; il existe un autre σ' fini tel que $\sigma \subset \sigma'$, tel que deux points consécutifs t_i, t_{i+1} de σ' vérifient $(t_{i+1}-t_i) < \eta$, et tel que

$$\sum_i (t_{i+1}-t_i) \|f'(t_i)\|$$

diffère de

$$\int_a^b \|f'(t)\| \, dt$$

de moins de ε.

La relation (1) appliquée aux couples (t_i, t_{i+1}) donne, en utilisant l'inégalité triangulaire, et après sommation :

$$\left| \sum |f(t_i)| - \sum (t_{i+1}-t_i) \|f'(t_i)\| \right| \leqslant \varepsilon(b-a), \tag{2}$$

d'où

$$\left| \mathrm{V}_{\sigma'} - \int_a^b \|f'(t)\| \, dt \right| \leqslant \varepsilon(b-a)+\varepsilon. \tag{3}$$

Or $\qquad \mathrm{V}_\sigma \leqslant \mathrm{V}_{\sigma'}, \qquad$ d'où $\quad \mathrm{V}_\mathrm{T} = \sup \mathrm{V}_\sigma = \sup \mathrm{V}_{\sigma'}$.

La relation (3) démontre donc la relation cherchée.

Cas particulier. — Si E est l'espace $\mathbf{R}^n$ muni de la norme euclidienne, la relation devient, en désignant par f_p les applications coordonnées de f :

$$\mathrm{V}_\mathrm{T} = \int_a^b \left(\sum f_p'^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Courbe paramétrée d'un espace produit. — Soit E_i une famille finie d'espaces métriques; soit d_i la distance sur E_i, et soit d l'une quelconque des distances usuelles sur le produit E des E_i.

Soit $f = (f_i)$ une application de $[a, b]$ dans E; soit V (resp. V_i) la variation totale de f (resp. f_i).

De l'inégalité

$$d_i(x_i, y_i) \leqslant d(x, y) \leqslant \Sigma\, d_i(x_i, y_i)$$

résulte une inégalité analogue pour les variations sur toute partie finie σ de $[a, b]$, d'où aussitôt :

$$\mathrm{V}_i \leqslant \mathrm{V} \leqslant \Sigma\, \mathrm{V}_i.$$

En particulier on peut énoncer :

PROPOSITION 24-9. — *Dire qu'une courbe paramétrée d'un produit fini d'espaces métriques est rectifiable équivaut à dire que chacune de ses projections sur les espaces facteurs l'est aussi.*

EXEMPLES. — 1° Soit Γ une courbe de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ définie par une application continue $f = (f_i)$ de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}^n$; dire que Γ est rectifiable équivaut à dire que chacune des f_i est à variation bornée.

2° Soit Γ le graphe dans $\mathbf{R}^2$ d'une application continue f de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$; on peut ici identifier le graphe Γ à la courbe $x \longrightarrow (x, f(x))$. Donc ce graphe a une longueur finie lorsque f est à variation bornée.

Z Il est essentiel de remarquer que la variation totale V de f (ou longueur du chemin de $\mathbf{R}$ associé à f) n'est jamais égale à la longueur du graphe de f; celle-ci est un élément de l'intervalle $]V, V+b-a]$.

Fonctions numériques à variation bornée. — Les exemples qui précèdent montrent l'importance des fonctions numériques à variation bornée; aussi allons-nous en faire une brève étude. Plus précisément nous allons étudier la structure de l'ensemble $\mathscr{V}$ des fonctions numériques finies à variation bornée sur $[a, b]$.

Pour tout $f \in \mathscr{V}$, nous désignerons par $V(f)$ la variation totale de f sur $[a, b]$.

PROPOSITION 24-10. — *1° $\mathscr{V}$ est un espace vectoriel, et V est une semi-norme sur $\mathscr{V}$, en ce sens que*

$$V \geqslant 0; \qquad V(\lambda f) = |\lambda| V(f); \qquad V(f_1+f_2) \leqslant V(f_1)+V(f_2).$$

2° $\mathscr{V}$ contient le cône convexe $\mathscr{V}_0$ des fonctions croissantes, et tout élément de $\mathscr{V}$ est la différence de deux éléments de $\mathscr{V}_0$.

DÉMONSTRATION. — 1° Soient f et g deux fonctions numériques quelconques sur $[a, b]$, et posons $h = f+g$. Pour tous $u, v \in [a, b]$ on a :

$$|h(u)-h(v)| = |(f(v)-f(u))+(g(v)-g(u))| \leqslant |f(v)-f(u)|+|g(v)-g(u)|.$$

Donc pour toute partie finie σ de $[a, b]$ on a :

$$V_\sigma(h) \leqslant V_\sigma(f)+V_\sigma(g) \leqslant V_f+V_g$$

d'où aussi

$$V(f+g) = V(h) \leqslant V(f)+V(g).$$

Donc si f et $g \in \mathscr{V}$, on a aussi $f+g \in \mathscr{V}$.

D'autre part on a évidemment $V(\lambda f) = |\lambda| V(f)$ pour tout $f \in \mathscr{V}$. Donc $\mathscr{V}$ est bien un espace vectoriel et V est une semi-norme sur $\mathscr{V}$.

2° Nous savons déjà que si f est croissante on a $V(f) = f(b) - f(a)$, donc $\mathscr{V}_0 \subset \mathscr{V}$. Comme $\mathscr{V}$ est un espace vectoriel, si f et $g \in \mathscr{V}_0$, on a aussi $f - g \in \mathscr{V}$; démontrons la réciproque :

Soit $f \in \mathscr{V}$; pour tout $t \in [a, b]$, désignons par $\varphi(t)$ la variation totale de f sur $[a, t]$; et posons

$$\psi(t) = \varphi(t) + f(t).$$

Pour tous $u, v \in [a, b]$ tels que $u < v$, on a :

$$\psi(v) - \psi(u) = (\varphi(v) - \varphi(u)) + (f(v) - f(u)).$$

Or il résulte de l'additivité de la variation totale que $\varphi(v) - \varphi(u)$ est la variation totale de f sur $[u, v]$; on a donc

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geqslant |f(v) - f(u)|, \text{ d'où } \psi(v) - \psi(u) \geqslant 0.$$

On a donc bien φ et $\psi \in \mathscr{V}_0$; comme $f = \psi - \varphi$, la propriété est établie.

COROLLAIRE **24**-*11*. — *Toute fonction numérique à variation bornée sur $[a, b]$ a une limite à droite et une limite à gauche en tout point.*

En effet les fonctions croissantes ont cette propriété, et celle-ci se conserve dans une soustraction.

Cas des fonctions continues. — Avec les notations ci-dessus, si f est continue et à variation bornée, la fonction φ est continue (corollaire 24-7) ; donc ψ est aussi continue.

Donc *toute fonction numérique continue à variation bornée est égale à la différence de deux fonctions continues croissantes.*

Exemples de fonctions numériques à variation bornée. **24**-*12*. — 1° Toute fonction f sur un intervalle I de **R**, qui est bornée et monotone par intervalles, c'est-à-dire telle qu'il existe une partition finie de I en intervalles, éventuellement réduits à un point, dans chacun desquels f est monotone. Lorsque de plus f est continue, la variation totale de f sur I est la somme des variations sur chacun de ces sous-intervalles.

Toutes les fonctions élémentaires sont de cette nature.

2° Si f est lipschitzienne de rapport k sur $[a, b]$, on a

$$V(f) \leqslant k(b - a).$$

C'est le cas en particulier des fonctions f dérivables à dérivée f' bornée; en effet, si $|f'| \leqslant k$, f est lipschitzienne de rapport k.

De façon plus précise, si f' est continue on a :

$$V(f) = \int_a^b |f'(t)|\, dt.$$

C'est un cas particulier de la relation établie dans le corollaire 24-8 (pour $n = 1$).

3° Par contre, voici un exemple simple de fonction continue partout dérivable sur $[a, b]$ et à variation totale infinie :

C'est la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par les relations

$$f(0)=0; \qquad f(x)=x^2 \cos^2(\pi/x^2) \text{ pour tout } x \neq 0.$$

En effet, pour tout entier $n > 1$, la variation totale de f sur $[n^{-\frac{1}{2}}, 1]$ est égale à $(1+1/2+\ldots+1/n)$ et cette somme tend vers $+\infty$ avec n.

IV. — EXERCICES

Avertissement : Les exercices assez difficiles sont marqués d'un astérisque.

La droite R et l'espace $\mathbf{R}^n$

1° Soit f une surjection strictement croissante d'un intervalle $[\alpha, \beta]$ sur un intervalle $[a, b]$. Montrer que f est continue et que la fonction inverse f^{-1} est définie et continue sur $[a, b]$ (autrement dit que f est une homéomorphie).

* 2° Soient A et B deux sous-ensembles dénombrables et partout denses de $]0, 1[$.
   a) Montrer qu'il existe une infinité de bijections croissantes de A sur B.
   b) Montrer qu'une telle bijection se prolonge d'une façon et d'une seule en une homéomorphie de $[0, 1]$ sur lui-même.

* 3° Montrer qu'il n'existe aucune partition dénombrable de l'intervalle $[0, 1]$ en sous-ensembles fermés non-vides.

4° Désignons par $0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ le développement décimal réduit d'un $x \in [0, 1[$; posons $S_n(x) = a_1+a_2+\ldots+a_n$; et soit $\lambda \in [0, 9[$. Montrez que l'ensemble des x tels que $S_n \leqslant \lambda n$ pour tout n est compact, sans point isolé, et ne contient aucun intervalle.

5° Montrer que toute isométrie de **R** dans **R** est de la forme $x \longrightarrow a+x$ ou $x \longrightarrow a-x$.

6° Montrer que dans $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ le complémentaire de tout pavé compact est connexe.

7° Soit D un domaine de $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 2)$.
   a) Montrer que quels que soient les points distincts a, b, c, de D, il existe dans D une ligne polygonale contenant a et b et ne contenant pas c.
   b) En déduire que D n'est homéomorphe à aucun sous-ensemble de **R**.

8° Montrer que tout arc simple de $\mathbf{R}^n$ est non-dense dans $\mathbf{R}^n$ (utiliser l'exercice 7).

9° Montrer que dans $\mathbf{R}^n$ l'ensemble A déduit de la sphère $\Sigma x_i^2 = 1$ en lui ôtant le point (0, ..., 0, 1) est homéomorphe à $\mathbf{R}^{n-1}$. (Commencer par $n = 2$ ou 3 en utilisant une projection stéréographique et généraliser ce procédé).

10° Montrer que toute boule ouverte de $\mathbf{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbf{R}^n$.

11° Montrer que toute partie convexe compacte de $\mathbf{R}^2$ est, ou bien un segment, ou bien homéomorphe à un disque fermé. Enoncer et démontrer un résultat analogue dans $\mathbf{R}^n$.

12° Soit ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ contenant O. Soit E l'ensemble des $x \in \omega$ tels que $[O, x] \subset \omega$ (*étoile* de **O** dans ω); montrer que E est ouvert et rencontre toute demi-droite δ d'origine O suivant un intervalle.
Pour toute δ, on pose $\varphi(\delta) =$ longueur de $(\delta \cap E)$. Montrer que φ est une fonction semi-continue inférieurement de δ (voir ch. VI).

13° Soit f une surjection isométrique de $\mathbf{R}^n$ sur un sous-ensemble A de $\mathbf{R}^n$.
a) Montrer que l'image $f(\Delta)$ de toute droite Δ de $\mathbf{R}^n$ est une droite.
b) En déduire que f est une transformation affine, et que $A = \mathbf{R}^n$.

Espaces topologiques

14° Soit E un espace topologique contenant une partie dénombrable partout dense. Montrer que toute famille d'ouverts non-vides et disjoints de E est finie ou dénombrable.

*15° On considère l'ensemble $\mathcal{O}$ des parties de $\mathbf{R}$ de la forme :

$$X = (\text{ouvert de } \mathbf{R}) \dot{-} (\text{ensemble fini ou dénombrable}).$$

Montrer que $\mathcal{O}$ est l'ensemble des ouverts pour une topologie $\mathfrak{T}$ sur $\mathbf{R}$, et étudier cette topologie. En particulier, déterminer les compacts de $\mathfrak{T}$.

16° Soit A un sous-ensemble fermé de $\mathbf{R}^2$; soit S l'ensemble des points x de A qui ont dans A un voisinage contenu dans un angle de sommet x de mesure $< \pi$. Montrer que S est fini ou dénombrable.

17° Désignons par X* la frontière d'un sous-ensemble X d'un espace topologique E; montrer que

$$X^* = (X \cap (\overline{\complement X})) \cup (\overline{X} \dot{-} X).$$

*18° Soit E un espace topologique; et soit X une partie de E. On appelle *adhérence séquentielle* de X l'ensemble des points de E qui sont limite d'une suite de points de X; on dit que X est *séquentiellement fermé* s'il est identique à son adhérence séquentielle. Montrer par des exemples que l'adhé-

rence séquentielle de X n'est pas toujours séquentiellement fermée (utiliser l'exercice 107).

Que peut-on appeler *fermeture séquentielle* de X ? Existe-t-elle toujours ?

19° Soit E un espace topologique, et soit X un sous-ensemble fermé de E. On appelle *dérivé* de X l'ensemble $X^{(1)}$ des points d'accumulation de X; et on définit les dérivés successifs $X^{(n)}$ par la condition que $X^{(n+1)}$ soit le dérivé de $X^{(n)}$. Puis on pose

$$X^{\omega} = \bigcap X^{(n)}.$$

Construire dans **R** un ensemble fermé A tel que $A^{(n)}$ (resp. A^{ω}) soit réduit à un seul point.

20° Soit f une application d'un espace topologique E dans **R**; montrer que si pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\{x : f(x) < \lambda\}$ et $\{x : f(x) > \lambda\}$ sont ouverts, f est continue. Plus généralement, soit f une application de E dans un espace topologique F; et soit (ω_i) une famille d'ouverts de F telle que tout ouvert de F soit réunion d'intersections finies d'ouverts ω_i (on dit que cette famille *engendre* la topologie de F). Comment peut-on caractériser les applications continues f en termes d'ouverts ω_i ?

21° On dit qu'une application f d'un espace topologique E dans un autre F est *ouverte* si pour tout ouvert ω de E, $f(\omega)$ est un ouvert de F.

a) Montrer que la projection d'un espace produit sur chacun des espaces facteurs est une application ouverte.

b) Caractériser les applications continues de **R** (resp. $\mathbf{R}^n$) dans **R** qui sont ouvertes.

c) Montrer que toute application holomorphe de **C** dans **C** qui n'est pas constante, est ouverte.

22° Soit f une application continue d'un espace topologique E dans **R**. Montrer que pour tout ouvert ω de **R**, $f^{-1}(\omega)$ est un F_σ ouvert (voir exercice 73).

23° Soit E un espace topologique à *base dénombrable* (voir exercice 88), et soit f une fonction numérique sur E. Montrer que si M désigne l'ensemble des $x \in E$ en lesquels f a un maximum local, $f(M)$ est fini ou dénombrable.

24° Soit E un espace topologique séparé à base dénombrable; montrer que l'ensemble P des points de E qui n'ont aucun voisinage dénombrable est parfait (fermé et sans point isolé). Montrer que $(E \dot{-} P)$ est au plus dénombrable.

25° Montrer que l'ensemble des ouverts (et des fermés) de **R** a la puissance du continu; même question pour $\mathbf{R}^n$. En déduire la puissance de l'ensemble des applications continues de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$.

26° Disons qu'une forme quadratique $\Sigma a_{ij} x_i x_j$ à coefficients réels et à n variables est définie positive si elle est > 0 pour tout $(x_i) \neq 0$. Montrer que

dans l'espace $\mathbf{R}^N$, où $N = n(n-1)/2$, l'ensemble des points $a = (a_{ij})$ représentant ces formes est ouvert.

27° Existe-t-il une fonction numérique f continue sur $[0, 1]$, telle que $f(x)$ soit rationnel pour x irrationnel, et irrationnel pour x rationnel ?

28° Trouver dans $\mathbf{R}$ deux sous-ensembles X, Y dont chacun soit l'image de l'autre par une bijection continue, sans qu'ils soient homéomorphes.

29° Soit X une partie d'un espace topologique E. A quelle condition la fonction caractéristique de X est-elle continue ?

30° Soient X, Y deux parties d'un espace topologique séparé E, telles que $E = X \cup Y$. Lorsque les restrictions de f à X et Y sont continues, est-ce que f est continue ? Examiner le cas où X et Y sont tous deux fermés (ou ouverts).

31° Montrer que, pour tout espace topologique E, la diagonale Δ de $E \times E$ est homéomorphe à E.

32° Soit f une application continue d'un espace topologique E dans un espace topologique F, et soit Γ le graphe de f dans $E \times F$. Montrer que E et Γ sont homéomorphes.

33° Soit E un espace topologique séparé, et soit f une application continue de E dans lui-même. Montrer que l'ensemble I des points x de E tels que $f(x) = x$ est fermé.
Donner des exemples variés pour lesquels I est vide et E métrique compact. Montrer qu'alors $d(x, f(x))$ reste supérieur à une constante $k > 0$.
Montrer que I n'est pas vide si E est une réunion finie des segments de $\mathbf{R}^2$ contenant O.

34° Montrer que, pour qu'un espace E soit séparé, il faut et il suffit que la diagonale de E^2 soit fermée dans E^2.

35° Soit f une application continue d'un espace X séparé dans lui-même. Montrer que l'ensemble des points x de X tels que $f(x) = x$ est fermé.

36° Soient f, g deux applications continues d'un espace topologique E dans un espace topologique séparé F. Si les restrictions de f et g à une partie partout dense de E coïncident, montrer que $f = g$.

37° Soit $(a_{m,n})$ une application de $\mathbf{N}^2$ dans un espace topologique séparé. Montrer que si

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} a_{m,n} = a \quad \text{et} \quad \lim_{m \to \infty} a_{m,n} = b_n, \quad \text{alors} \quad \lim_{n \to \infty} b_n = a.$$

38° Soit E un espace topologique séparé, et soit (a_n) une suite de points de E qui converge vers a. Montrer que l'ensemble $\{a, a_1, a_2, \ldots\}$ est compact.

39° Construire une application $(x,y) \longrightarrow f(x, y)$ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ telle que
1. Les applications partielles $x \longrightarrow f(x, y)$ et $y \longrightarrow f(x, y)$ soient continues.
2. L'ensemble des points de discontinuité de f soit partout dense dans $\mathbf{R}^2$.

40° Soit E un espace topologique, et (ω_i) une base d'ouverts de E (voir exercice 88). Montrer que si tout recouvrement de E par des ω_i contient un sous-recouvrement fini, E est compact.

41° Soit (K_n) une suite décroissante de compacts non-vides d'un espace séparé E. Montrer que $K = \bigcap K_n$ n'est pas vide, et que pour tout ouvert ω contenant K, il existe un K_n contenu dans ω.

42° Soit E un espace compact infini; on désigne par Δ la diagonale de $E \times E$. Montrer qu'il existe une partie dénombrable A de $E \times E$ telle que

$$A \cap \Delta = \emptyset \quad \text{et} \quad \overline{A} \cap \Delta \neq \emptyset .$$

43° On note $\prec$ la relation définie sur l'ensemble $E = [0, 1]^2$ en posant :
$(x, y) \prec (x', y')$ lorsque, ou bien $(x < x')$, ou bien $(x = x'$ et $y \leqslant y')$.
a) Montrer que c'est une relation d'ordre total (ordre lexicographique).
b) Montrer que E muni de la topologie associée à cet ordre est compact.

44° Soit (A_n) une suite décroissante de sous-ensembles de $\mathbf{R}$, dont chacun est réunion finie d'intervalles fermés, disjoints deux à deux. On suppose que chacun des intervalles qui constituent A_n contient exactement deux des intervalles qui constituent A_{n+1}, et que le diamètre de ces intervalles tend vers 0 avec $1/n$. Montrer que l'ensemble $A = \bigcap A_n$ est compact et sans point isolé; montrer aussi que deux quelconques de ces ensembles A sont homéomorphes.

45° Montrer que, dans tout espace séparé X, si deux sous-ensembles compacts A et B sont disjoints, ils possèdent des voisinages disjoints. (Commencer par traiter le cas où B est réduit à un point.)

46° Soit X un espace compact, Y un espace topologique quelconque. Montrer que si A est fermé dans $X \times Y$, sa projection sur Y est fermée.

47° Soit f une application d'un espace X dans un espace *séparé* Y.
a) Montrer que si f est continue, le graphe de f est fermé dans $X \times Y$. Montrer par un exemple (où $X = Y = \mathbf{R}$) que la réciproque est inexacte.
b) Montrer par contre que si Y est compact, ces deux affirmations sont équivalentes.

48° Soient L et X deux espaces compacts, et soit f une application continue de $L \times X$ dans un espace séparé Y telle que, pour tout $\lambda \in L$, l'application $x \longrightarrow f(\lambda, x)$ de X dans Y soit injective. Soit alors $y_0 \in Y$.
1° Montrer que l'ensemble L_0 des $\lambda \in L$ tels que l'équation $y_0 = f(\lambda, x)$ ait une solution, est fermé dans L.

2° Montrer que la solution $x = \varphi(\lambda)$ de cette équation est une fonction continue de λ sur L_0.

49° Soient dans $\mathbf{R}^3$ deux cercles C_1 et C_2. Montrer, en se basant sur des propriétés de maximum, qu'il existe au moins une droite qui rencontre C_1, C_2 et leurs axes.

50° Dans le plan $\mathbf{R}^2$ rapporté à deux axes quelconques, on définit une droite par son équation $ax+by+c=0$, où a et b ne sont pas tous deux nuls. En utilisant cette forme, établir une correspondance entre l'ensemble D de ces droites et un ensemble de droites de $\mathbf{R}^3$ passant par l'origine. Quelle topologie naturelle peut-on en déduire sur D ; cette topologie dépend-elle des axes choisis ?
Quel élément pourrait-on ajouter à D pour le rendre compact ? Citer d'autres espaces homéomorphes à ce compact.
Peut-on procéder de façon analogue pour les droites de $\mathbf{R}^3$?

51° Montrer que si le produit $X \times Y$ est compact, X et Y sont compacts. Quel est l'énoncé analogue lorsque $(X \times Y)$ est localement compact ?

52° Soient dans l'espace $\mathbf{R}^3$ trois droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, deux à deux non parallèles et non sécantes. Montrer que parmi tous les triangles (x_1, x_2, x_3) où $x_i \in \Delta_i$ $(i = 1, 2, 3)$, il y en a un dont l'aire (resp. le périmètre) est minimum.

53° Montrer que dans $\mathbf{R}^2$ l'ensemble des points qui ont au moins une coordonnée irrationnelle est connexe.

54° Soit (C_n) une suite décroissante de continus d'un espace topologique E. Montrer que leur intersection $C = \bigcap C_n$ est aussi un continu.

55° Montrer que le graphe de la fonction $y = \sin 1/x$ $(x \in]0, 1])$ est connexe. Déterminer sa fermeture et montrer que c'est un continu qui n'est pas un arc simple.

56° Soit G un ouvert de $\mathbf{R}^n$.
a) Montrer que chacune des composantes connexes de G est un ouvert (donc aussi un domaine).
b) Montrer que l'ensemble de ces composantes connexes est au plus dénombrable.

57° Soit A un ensemble totalement ordonné, muni de la topologie associée à son ordre. Montrer que si A est connexe, toute partie majorée de A a une borne supérieure, et qu'aucun point de A n'a de successeur (y est successeur de x si $x < y$ et $]x, y[= \emptyset$). La réciproque est-elle exacte ?

*58° Soit f une homéomorphie de [0, 1] sur lui-même.
1. Montrer que f, ou bien laisse fixes les extrémités, ou bien les échange.
2. Si $f^2 =$ identité, montrer que, ou bien $f =$ identité, ou bien f est, en un sens qu'on précisera, la transmuée d'une symétrie centrale.

59° Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans lui-même; montrer que f a au moins un point fixe.

60° Soit A une partie fermée de $[0, 1] \times [0, 1]$ telle que, pour tout $x \in [0, 1]$, l'ensemble des y tels que $(x, y) \in A$ soit un intervalle fermé I_x. Montrer qu'il existe un x tel que $x \in I_x$.

61° Soit E un espace topologique et soit A une partie de E. Montrer que toute partie connexe de E qui rencontre $\mathring{A}$ et $\mathring{\complement} A$ rencontre aussi la frontière de A.

Espaces métriques

62° Soit E l'espace métrique obtenu en dotant la sphère $x^2+y^2+z^2 = 1$ de $\mathbf{R}^3$ de la distance géodésique.
Pour tout $m \in E$ et tout nombre $\rho > 0$, calculer le diamètre $\delta(\rho)$ dans E du « cercle » de centre m et de rayon ρ. Montrer que $\delta(\rho)$ n'est pas une fonction croissante de ρ.

*63° On reprend les notations utilisées dans l'exercice du chapitre I concernant le théorème de Cantor-Bernstein.
On suppose maintenant que A et B sont des espaces topologiques (resp. métriques) et que φ, ψ sont des homéomorphies (resp. des isométries). A quels énoncés conduit alors la démonstration suggérée dans cet exercice?

64° Soit (a_n) une suite de points d'un espace métrique. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de cette suite est identique à l'ensemble des limites des sous-suites convergentes de la suite donnée.

65° Soit f une application d'un espace métrique E dans un espace topologique F. Montrer l'équivalence entre la continuité de f en un point $a \in E$ et la propriété suivante :
Pour toute suite (a_n) de E telle que $\lim a_n = a$, on a $\lim f(a_n) = f(a)$.

66° Soit f une application d'un espace topologique X dans un espace métrique Y. Pour tout $x_0 \in X$ on appelle *oscillation* de f en x_0 le nombre positif : $\omega(f, x_0) = \inf$ (diamètre de $f(V)$), où V parcourt l'ensemble des voisinages de x_0.

a) Montrer que la continuité de f en x_0 équivaut à l'égalité $\omega(f, x_0) = 0$.

b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des points x de E en lesquels $\omega(f, x) \geqslant \varepsilon$ est fermé.

67° Soit E un espace métrique, et soit $(m, n) \longrightarrow a_{mn}$ une application de $\mathbf{N}^2$ dans E. On suppose que

$$\lim_{n\to\infty} a_{mn} = a_m \quad \text{et} \quad \lim_{m\to\infty} a_m = a.$$

Montrer qu'il existe une sous-suite $n \longrightarrow p_n$ de $\mathbf{N}$ telle que

$$\lim a_{n, p_n} = a.$$

Ce résultat s'étend-il au cas d'un espace topologique E ?

68° Soit X un espace métrique et A un sous-ensemble de X. Pour tout nombre $\rho > 0$, on désigne par $B(A, \rho)$ l'ensemble des $x \in X$ tels que $d(x, A) < \rho$.

a) Montrer que
$$B(A, \rho) = \bigcup_{x \in A} B(x, \rho).$$

b) Montrer que
$$\overline{A} = \bigcap_{\rho} B(A, \rho).$$

69° Soit X un espace métrique et A, B deux sous-ensembles *fermés* de X. On désigne respectivement par D_A, D_B, I, l'ensemble des points x tels que

$$d(x, A) < d(x, B); \quad d(x, A) > d(x, B); \quad d(x, A) = d(x, B).$$

a) Montrer que D_A et D_B sont ouverts. En déduire que A et B possèdent des voisinages ouverts disjoints.

b) Montrer que I est fermé, et déterminer cet ensemble lorsque X est un plan et lorsque A, B désignent des droites, des cercles ou des disques fermés de X.

70° Montrer que tout espace métrique est homéomorphe à un espace métrique borné. A-t-on un énoncé analogue pour la structure uniforme ?

71° Construire des exemples de bijections continues (et même uniformément continues) d'un espace métrique E sur un autre F, et qui ne sont pas des homéomorphies.

*72° Soit f une application d'une partie partout dense A d'un espace topologique E dans un espace métrique F telle que $\lim_{x \in A,\, x \to a} f(x)$ existe pour tout $a \in E$. Montrer qu'il existe un prolongement et un seul de E dans F qui soit une application continue de E dans F.

73° Nous dirons qu'une partie X d'un espace topologique est un F_σ (resp. G_δ) si X est une réunion dénombrable de fermés (resp. une intersection dénombrable d'ouverts).

a) Montrer que la classe des F_σ (resp. G_δ) est stable par réunion dénombrable (resp. intersection dénombrable).

b) Montrer que le complémentaire d'un F_σ est un G_δ, et inversement.

c) Donner des exemples de parties de $\mathbf{R}$ qui sont des F_σ de $\mathbf{R}$ et qui ne sont ni ouvertes, ni fermées.

d) Montrer que dans un espace métrique, tout ouvert est un F_σ, et tout fermé un G_δ.

74° Soit E un ensemble muni d'un écart d, et de la topologie associée à cet écart. Montrer que pour tout $X \subset E$, l'application $x \longrightarrow d(x, X)$ est continue. Montrer que
$$\overline{X} = \{x : d(x, X) = 0\}.$$

75° Si une fonction numérique f est uniformément continue dans $\mathbf{R}^n$, montrer que l'on a : $|f(x)| \leqslant a|x| + b$ où a et b sont des constantes positives et $|x|$ la distance de x à l'origine.

76° Pour tout espace métrique E, montrer que la distance $d(x, y)$ est uniformément continue sur E^2.

77° Construire un exemple de fonction numérique sur $[0, 1]$, ayant partout une dérivée finie, et cependant non lipschitzienne.

78° Soient E, F deux espaces métriques, Φ une famille d'applications de E dans F. On suppose que, pour tout $x \in E$, toute $f \in \Phi$, tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta(x, f, \varepsilon) > 0$ tel que

$$(d(x, y) < \eta(x, f, \varepsilon)) \Longrightarrow \Big(d(f(x), f(y)) < \varepsilon\Big).$$

Interpréter ce que signifie le fait que η ne dépend pas de ε, ou ne dépend pas de x, ou ne dépend pas de f, ou ne dépend ni de f ni de x.

79° Soit E un espace métrique, et soit $A \subset E$. Montrer que la compacité de $\overline{A}$ équivaut à chacune des conditions :
a) Toute suite de points de A contient une sous-suite qui converge dans E.
b) Toute partie infinie de A a au moins un point d'accumulation dans E.

80° Soit (F_i) une famille finie de fermés d'un espace métrique compact, dont l'intersection est vide. Montrer qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que tout ensemble qui rencontre tous les F_i ait un diamètre au moins égal à ε.

*81° Soit K un compact d'un espace métrique E ; on désigne par $B(\varepsilon)$ l'ensemble des $x \in E$ tels que $d(x, K) < \varepsilon$. Montrer que les $B(\varepsilon)$ constituent une base de voisinages de K. Cette conclusion s'étend-elle à des ensembles K non compacts ?

82° Soit E un espace métrique compact. Montrer que tout sous-espace métrique A de E isométrique à E est identique à E.
Montrer par un exemple simple que ceci n'est pas toujours vrai quand E n'est pas compact.

83° Soient X, Y deux espaces métriques compacts ; f une application de X dans Y, et g une application de Y dans X. Montrer que si f et g sont des isométries, on a $f(X) = Y$ et $g(Y) = X$.

84° Soit E un espace métrique non complet. Montrer qu'on peut définir sur E des fonctions continues de chacun des types suivants :
a) f est continue et non bornée.
b) f est continue, bornée, mais n'est pas uniformément continue.
Examiner les mêmes questions lorsqu'on suppose seulement E non compact, mais complet.

85° On a souligné dans ce chapitre que la convergence simple d'une suite de fonctions n'entraînait pas en général sa convergence uniforme. On demande de démontrer que c'est cependant le cas dans chacune des circonstances suivantes :

a) X est un espace compact et f_n est une suite *croissante* d'applications semi-continues inférieurement de X dans **R** (c'est-à-dire que $f_p(x) \leqslant f_q(x)$ pour tout $x \in$ X si $p \leqslant q$) qui converge simplement vers une fonction f *continue* (ce résultat étend le théorème de Dini).

b) $X = [0, 1]$ et f_n est une suite d'applications croissantes de X dans **R** (pas nécessairement continues) qui convergent simplement vers une fonction f continue.

86° Soient X, Y deux espaces métriques, X étant compact. Soient f et f_n ($n \in \mathbf{N}$) des applications continues de X dans Y.
Montrer que s'il existe une constante $k > 0$ telle que pour tous entiers p, q et pour tout x on ait

$$d(f(x), f_{p+q}(x)) \leqslant kd(f(x), f_p(x)),$$

la convergence simple de f_n vers f entraîne la convergence uniforme. Ce résultat étend le théorème de Dini.

*87° Montrer que tout espace métrique compact est fini, ou dénombrable, ou bien à la puissance du continu.
Plus précisément, tout métrique complet sans points isolés contient un ensemble homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor.

88° On appelle *base* d'un espace topologique E toute famille d'ouverts de E telle que tout ouvert de E soit réunion d'une sous-famille de la base. Montrer que :

a) Si E est à base dénombrable, de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable.

b) Si E est à base dénombrable, tout sous-espace de E l'est aussi.

c) Si deux espaces E_1 et E_2 sont à base dénombrable, leur produit $E_1 \times E_2$ l'est aussi.

d) Si E est à base dénombrable, il existe dans E un sous-ensemble dénombrable D partout dense.

e) Tout espace métrique compact est à base dénombrable.

f) $\mathbf{R}^n$ est à base dénombrable.

89° Mettre une topologie naturelle sur l'ensemble des demi-droites d'origine O dans $\mathbf{R}^n$; même question pour les droites contenant O. Montrer que les espaces obtenus sont compacts et métrisables.

90° On désignera par E (resp. E') l'ensemble des cercles du plan euclidien $\mathbf{R}^2$ de rayon $\geqslant 0$ (resp. > 0). (Tout cercle du plan est donc représenté par un point de E.)

a) On montrera que, pour une topologie naturelle que l'on précisera, E est homéomorphe à un demi-espace fermé de $\mathbf{R}^3$; que devient E' dans cette homéomorphie ?

b) Soit f l'application de E dans $\mathbf{R}^2$ qui, à tout cercle C, associe son centre f(C). Montrer que f est continue. Soit A une partie fermée de $\mathbf{R}^2$. Que peut-on dire de l'ensemble des éléments de E dont les

centres appartiennent à A, et de l'ensemble des éléments de E tels que la circonférence correspondante rencontre A ?

c) Montrer que l'ensemble des éléments de E dont la circonférence est contenue dans un compact K de $\mathbf{R}^2$ est compact; montrer que parmi ces éléments il y en a un dont le rayon est maximum.

91° Montrer que pour toute suite de Cauchy (a_n) d'un espace métrique, l'ensemble $\{a_1, a_2, ...\}$ est borné. Montrer par un exemple que la réciproque est inexacte, et qu'il peut même exister des suites bornées dont aucune sous-suite n'est une suite de Cauchy.

92° Soient E un espace métrique, (a_n) une suite de Cauchy de E, (b_n) une suite de nombres > 0. Montrer qu'il existe une sous-suite (a_{n_p}) de la suite donnée telle que, pour tout p, $d(a_{n_p}, a_{n_{p+1}}) < b_p$.

93° Soient E, F deux espaces métriques, et f une bijection de E sur F. Montrer que si F est complet, si f est uniformément continue, et son inverse f^{-1} continue, E est aussi complet.

94° Soit (f_n) une suite uniformément convergente d'applications d'un ensemble E dans un espace métrique complet F, et soit f la limite des f_n.
Montrer que si pour tout n, $f_n(\mathrm{E})$ est relativement compact, il en est de même de $f(\mathrm{E})$.

95° Soit E un espace métrique complet; montrer qu'un des critères de compacité de E est que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des ensembles de diamètre $< \varepsilon$.

96° Soit f une application continue de E métrique dans F métrique, qui soit uniformément continue sur toute partie bornée de E.

a) Montrer que pour toute suite de Cauchy (a_n) de E, $(f(a_n))$ est une suite de Cauchy de F.

b) Si $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}'$ avec E partout dense dans E′, et si F est complet, montrer que f se prolonge de façon unique en une application continue de E′ dans F.

97° Montrer que si le produit $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ de deux espaces métriques est complet, X et Y le sont aussi.

98° E étant un ensemble quelconque et F un espace métrique, montrer que le sous-ensemble $\mathscr{B}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ de $\mathscr{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ constitué par les applications bornées de E dans F, est à la fois ouvert et fermé dans $\mathscr{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

99° Montrer que le sous-espace F′ de $\mathscr{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ constitué par les applications constantes de E dans F est fermé dans $\mathscr{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et qu'il est isométrique à F.

100° Montrer que pour tout ensemble E, l'application $u \longrightarrow \sup u(x)$, de $\mathscr{B}(\mathrm{E}, \mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$ est continue.

101° Soient E un espace compact métrique, F un espace métrique à base dénombrable. Montrer que $\mathscr{C}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est un espace à base dénombrable.

Les trois exercices suivants conduisent aux énoncés de base de la théorie de la *catégorie.*

*102° Soit E un espace métrique complet, et soit G_n une suite d'ouverts de E, dont chacun soit partout dense sur E ($\overline{G}_n = E$).

a) Montrer que l'ensemble $G = \bigcap G_n$ est aussi l'intersection d'une suite *décroissante* d'ouverts partout denses de E.

b) En déduire que G n'est pas vide, et plus précisément que G est partout dense sur E.

103° Soit E un espace métrique complet. Déduire de l'exercice 102 que l'on ne peut avoir :

$$E = \bigcup_n A_n, \text{ où chaque } A_n \text{ est non-dense sur E.}$$

104° Soit E un espace métrique complet. Déduire de l'exercice 103 que si

$$E = \bigcup_n A_n,$$

où chaque A_n est fermé, il existe un A_n dont l'intérieur $\mathring{A}_n$ est non-vide, et plus précisément que l'ouvert $G = \bigcup \mathring{A}_n$ est partout dense sur E.

105° Pour tout nombre rationnel $x \in [0, 1[$, posons $x = p/q$ où p et q sont des entiers premiers entre eux. Soit n un entier $\geqslant 3$ et soit $i(x)$ l'intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, de centre x et de demi-longueur $1/q^n$. On pose

$$G_n = \bigcup_x i(x).$$

a) Montrer que pour tout n, la somme l_n des longueurs des $i(x)$ est finie et que $l_n \to 0$.

b) Montrer que $G = \bigcap G_n$ contient d'autres points que les nombres rationnels. Donner un exemple d'un tel point.

106° Soit E un ensemble dénombrable, dont les points sont a_1, a_2, ... On pose

$$d(a_p, a_p) = 0 \qquad \text{et} \qquad d(a_p, a_q) = 10 + 1/p + 1/q \qquad \text{si} \quad p \neq q.$$

a) Montrer que d est une distance, et que E muni de cette distance est complet.

b) Soit f l'application de E dans E telle que $f(a_p) = a_{p+1}$. Montrer que f diminue strictement les distances et que cependant f n'a aucun point fixe.

c) En modifiant un peu cet exemple, construire un espace métrique complet F et une application f de F dans lui-même qui diminue strictement les distances, et qui possède un point fixe a, et telle cependant que pour tout $x \neq a$, $f^{(n)}(x)$ ne tende pas vers a.

*107° Soit E l'ensemble des applications quelconques de [0, 1] dans lui-même. Pour toute $f_0 \in E$, on appelle *ensemble élémentaire* de centre f_0 tout

ensemble $V(f_0; \varepsilon; x_1, ..., x_n)$ où ce symbole désigne l'ensemble des f telles que $|f(x_i)-f_0(x_i)| < \varepsilon$ ($i = 1, 2, ..., n$) où ε est un nombre > 0 et où les x_i sont des points de $[0, 1]$.

On appelle « ouvert » de E toute réunion d'ensembles élémentaires.

a) Vérifier que ces « ouverts » satisfont aux axiomes O_1, O_2, O_3, O_4 et définissent donc une topologie sur E.

b) Si l'on appelle *simple* toute fonction f partout nulle sur $[0, 1]$ sauf en un nombre fini de points, montrer que l'ensemble des fonctions simples est partout dense sur E.

c) Montrer qu'une fonction f qui est non nulle pour une infinité non-dénombrable de valeurs de x ne peut être dans E limite d'une *suite* de fonctions simples.

d) En déduire que sur l'espace E on ne peut définir aucune métrique dont la topologie associée soit celle de E, autrement dit que E est non métrisable.

e) Montrer que toute fonction simple est limite d'une suite de fonctions continues; que la fonction g qui vaut 1 sur les rationnels et 0 ailleurs est limite d'une suite de fonctions simples; et que cependant g n'est pas limite d'une suite de fonctions continues.

108° Soit $\mathscr{F}$ une famille également continue de fonctions numériques continues sur un espace métrique E, et soit f l'enveloppe supérieure des éléments de $\mathscr{F}$. Montrer que si E est connexe, f est partout finie ou partout $+\infty$; montrer que si f est finie, elle est uniformément continue.

*109° Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions numériques $\geqslant 0$ et continues sur un espace topologique E, telle que pour tout $x \in E$, la somme $f(x) = \sum_i f_i(x)$ soit finie (au sens de 8-2, chap. VII), et que f soit continue.

Montrer que pour tout $J \subset I$, la fonction $f_J = \sum_{i \in J} f_i$ est continue, et que la famille des f_J est équicontinue en tout point.

110° Soit f une fonction numérique uniformément continue sur $\mathbf{R}$. On pose

$$f_a(x) = f(x-a).$$

Montrer que l'ensemble des fonctions f_a est « également continue » sur $\mathbf{R}$. En déduire que sur tout compact K de $\mathbf{R}$, l'ensemble des oscillations des f_a est majoré.

111° Soit A une partie non-vide d'un espace métrique E et soit f une application de A dans $\mathbf{R}$, lipschitzienne de rapport k. Pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in A$, on pose

$$f_y(x) = f(y) + kd(x, y).$$

Montrer que g définie par

$$g(x) = \inf_{y \in A} f_y(x)$$

est finie pour tout x, est k-lipschitzienne, et que sa restriction à A est identique à f.

112° Soit E un espace métrique compact, et soit J une partie compacte de l'espace C des fonctions numériques continues sur E, muni de la métrique de la convergence uniforme. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $k > 0$ possédant les propriétés suivantes :

Pour tout $\alpha \in J$, il existe $\beta \in C$ tel que $\|\alpha - \beta\| \leqslant \varepsilon$, la fonction β étant lipschitzienne de rapport k. (Appliquer l'exercice précédent en prenant pour A une partie finie convenable de E.)

** 113° Soit f une fonction numérique continue à variation bornée sur $[0, 1]$ et soit $g(x)$ la variation totale de f sur $[0, x]$.

Montrer que les graphes de f et g (en axes rectangulaires) ont même longueur.

Montrer que les surfaces de révolution d'axe Oy engendrées par ces graphes ont même aire, et plus précisément sont « isométriques » (par une homéomorphie conservant la longueur des courbes).

114° On pose :

$$f(x) = \sum_n 2^{-n} \sin(10^n x);$$

montrer que la variation totale de f sur tout intervalle de $\mathbf{R}$ est infinie.

V. — INDEX TERMINOLOGIQUE DU CHAPITRE V ([1])

([1]) Les chiffres de ce tableau renvoient aux paragraphes et à leurs subdivisions.

VI. — BIBLIOGRAPHIE

BOURBAKI, N., *Topologie générale*, ch. I, III, IV, IX, Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, Paris.
DIEUDONNÉ, J., *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, N.Y., 1960.
FRANKLIN, Philip, *A Treatise on Advanced Calculus*, John Wiley and Sons, N.Y., 1940.
KELLEY, J. L., *General Topology*, Van Nostrand Company, 1955.
KURATOWSKI, C., *Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie*, Monographie nº 15 de l'Ens. Math., Genève ; *Topologie*, I et II, Varsovie.
NEWMAN, M. H. A., *Elements of Topology of Plane Sets of Points*, Cambridge, 1939.
SIERPINSKI, W., *General Topology*, Univ. of Toronto Press, Toronto, 1952.
WHYBURN, G. P., *Analytic Topology*, A.M.S. Colloquium Publications 28, New York.

VII. — DÉFINITIONS ET AXIOMES

AXIOMES DES ESPACES TOPOLOGIQUES

O_1 : L'ensemble vide et l'espace entier sont ouverts.
O_2 : Toute intersection *finie* d'ouverts est un ouvert.
O_3 : Toute réunion d'ouverts est un ouvert.

On appelle *fermé* tout ensemble dont le complémentaire est ouvert.

PROPRIÉTÉS DES FERMÉS

F_1 : L'espace entier et l'ensemble vide sont fermés.
F_2 : Toute réunion *finie* de fermés est un fermé.
F_3 : Toute intersection de fermés est un fermé.

On appelle *voisinage* d'un point x d'un espace E tout sous-ensemble de E contenant un ouvert contenant x.

ESPACE SÉPARÉ. — Un espace E est dit *séparé* s'il vérifie l'axiome suivant :

O_4 : Deux points distincts de E possèdent deux voisinages *disjoints*.

Produit d'espaces. — Si E_1, E_2 sont des espaces topologiques, l'espace topologique produit $E = E_1 \times E_2$ est l'espace obtenu en prenant comme ouverts sur l'ensemble $E_1 \times E_2$ toute réunion d'ensembles élémentaires $\omega_1 \times \omega_2$ où ω_i est un ouvert de E_i $(i = 1, 2)$.

Espace compact. — Un espace E est dit *compact* s'il est séparé et si de plus il vérifie l'axiome des recouvrements ouverts :

O_5 : De tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un recouvrement fini.

Espace connexe. — Un espace E est dit *connexe* si E et O sont les seuls sous-ensembles à la fois ouverts et fermés de E.

Groupe, anneau et corps topologiques. — Un *groupe topologique* est un groupe muni d'une topologie pour laquelle les fonctions (x^{-1}) et $(x \mathrm{T} y)$ sont continues.

Un *anneau topologique* est un anneau muni d'une topologie pour laquelle les fonctions $(-x)$, $(x+y)$, $(x \cdot y)$ sont continues.

Un *corps topologique* : Mêmes conditions que pour les anneaux, avec en plus la continuité de x^{-1} pour tout $x \neq 0$.

Espaces métriques. — Un espace *métrique* est un ensemble E auquel est associée une *distance* $d(x, y)$, c'est-à-dire une fonction numérique définie sur E^2 et telle que :

M_1 : $d(x, y) > 0$ si $x \neq y$; $d(x, x) = 0$.
M_2 : $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie).
M_3 : $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).

Un espace métrique E est dit *complet* si toute suite de Cauchy de E est convergente.

VIII. — RAPPEL DE NOTATIONS CLASSIQUES

Les notations **N**, **Z**, **Q**, **R**, **C** désignent respectivement :

l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots\}$ des entiers naturels,
l'ensemble des entiers de signe quelconque.
l'ensemble des nombres rationnels,
l'ensemble des nombres réels,
l'ensemble des nombres complexes.

Les notations $\mathbf{Q}_+$, $\mathbf{R}_+$ désignent l'ensemble des éléments $\geqslant 0$ de $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$ respectivement.

Les notations $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{Z}^*$, $\mathbf{Q}^*$, $\mathbf{R}^*$, $\mathbf{C}^*$ désignent respectivement $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ diminués de leur élément 0.

Enfin $\overline{\mathbf{R}}$ désigne l'ensemble $[-\infty, +\infty]$ déduit de $\mathbf{R}$ par adjonction de deux points à l'infini.

CHAPITRE II

FONCTIONS NUMÉRIQUES

On appellera fonction *numérique* sur un ensemble E toute application de E dans la droite achevée $\overline{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty]$; les applications dans $\mathbf{R}$ seront appelées fonctions numériques *finies,* ou simplement fonctions numériques lorsque le contexte indiquera clairement qu'elles sont finies. L'ensemble de ces fonctions sera noté $\mathscr{F}(E, \overline{\mathbf{R}})$ $\big($resp. $\mathscr{F}(E, \mathbf{R})\big)$.

On étudiera dans ce chapitre les propriétés spéciales des fonctions numériques dues au fait que $\mathbf{R}$ est un corps et un ensemble ordonné; en particulier on étudiera certaines classes d'applications d'un intervalle de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

I. — FONCTIONS NUMÉRIQUES DÉFINIES SUR UN ENSEMBLE QUELCONQUE

1. – Relation d'ordre sur $\mathscr{F}(E, \mathbf{R})$ *et sur* $\mathscr{F}(E, \overline{\mathbf{R}})$

On désignera par $\mathscr{F}(E, \overline{\mathbf{R}})$ (resp. $\mathscr{F}(E, \mathbf{R})$) l'ensemble des fonctions numériques (resp. finies) sur E.

L'ensemble $\mathscr{F}(E, \mathbf{R})$ peut évidemment être muni d'une structure d'algèbre. Il possède également une structure d'ordre compatible avec sa structure d'algèbre :

Pour tout $f \in \mathscr{F}(E, \mathbf{R})$ nous dirons que f est *positive* et nous noterons $f \geqslant 0$ si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$.

Il est immédiat que si $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$ et si $\lambda \in \mathbf{R}_+$ on a :

$$f+g \geqslant 0, \qquad fg \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda f \geqslant 0.$$

Plus généralement, pour tous $f, g \in \mathscr{F}(E, \mathbf{R})$ on pose :

$$f \leqslant g \qquad \text{si } g-f \geqslant 0$$

(ce qui équivaut à $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in E$). Il est immédiat que la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{F}(E, \mathbf{R})$ (ordre non total si E contient

plus d'un point); et on vérifie que pour tous $f, g, h \in \mathscr{F}(\mathrm{E}, \mathbf{R})$ et pour tout $\lambda \in \mathbf{R}_+$, la relation $f \leqslant g$ entraîne :

$$f+h \leqslant g+h; \qquad \lambda f \leqslant \lambda g; \qquad fh \leqslant gh \quad \text{si } h \geqslant 0.$$

De même on vérifierait que la relation définie sur $\mathscr{F}(\mathrm{E}, \overline{\mathbf{R}})$ par :

$$f \leqslant g \qquad \text{si } f(x) \leqslant g(x) \text{ pour tout } x \in \mathrm{E}$$

est une relation d'ordre. Il est bon cependant de noter que les opérations de $\mathscr{F}(\mathrm{E}, \mathbf{R})$ ne s'étendent pas à $\mathscr{F}(\mathrm{E}, \overline{\mathbf{R}})$; en particulier ce dernier ensemble n'est pas un espace vectoriel.

Pour toute $f \in \mathscr{F}(\mathrm{E}, \overline{\mathbf{R}})$, on désigne par $|f|$ la fonction telle que $|f|(x) = |f(x)|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

On a évidemment la relation :

$$-|f| \leqslant f \leqslant |f|.$$

REMARQUE. — Il faut noter que la relation $f \geqslant 0$ n'entraîne pas que, ou bien $f(x) = 0$ pour tout x, ou bien $f(x) > 0$ pour tout x.

2. — *Bornes d'une fonction numérique*

Rappelons que $\overline{\mathbf{R}}$ est isomorphe (pour l'ordre) à $[0, 1]$; il en résulte que toute partie non-vide de $\overline{\mathbf{R}}$ a dans $\overline{\mathbf{R}}$ une borne supérieure et une borne inférieure; on peut donc donner la définition suivante :

Définition 2-*1*. — POUR TOUTE $f \in \mathscr{F}(\mathrm{E}, \overline{\mathbf{R}})$ ET POUR TOUTE PARTIE NON-VIDE X DE E, ON APPELLE *BORNE SUPÉRIEURE* (RESP. INFÉRIEURE) DE f SUR X LA BORNE SUPÉRIEURE (RESP. INFÉRIEURE) DE $f(\mathrm{X})$ DANS $\overline{\mathbf{R}}$.

ON NOTE CES BORNES $\sup\limits_{x \in \mathrm{X}} f(x)$ ET $\inf\limits_{x \in \mathrm{X}} f(x)$.

Les propriétés des bornes supérieure et inférieure d'une partie de $\overline{\mathbf{R}}$ entraînent que, par exemple, le nombre $a = \sup\limits_{x \in \mathrm{X}} f(x)$ est caractérisé par les propriétés suivantes :

1° Pour tout $x \in \mathrm{X}$, on a $f(x) \leqslant a$;

2° Pour tout $b < a$, il existe $x \in \mathrm{X}$ tel que $b < f(x)$.

Lorsque f est partout finie dans X, l'oscillation de f sur X (voir ch. V, § 15) est égale à

$$\left(\sup_{x \in \mathrm{X}} f(x) - \inf_{x \in \mathrm{X}} f(x)\right)$$

Lorsque f n'est pas partout finie sur X, cette différence sera par définition l'oscillation de f sur X, du moins lorsque cette différence a un sens, c'est-à-dire lorsque $f(\mathrm{X})$ n'est pas réduit au point $+\infty$ ou au point $-\infty$.

Définition 2-2. — ON DIT QUE f EST *MAJORÉE* (RESP. MINORÉE) SUR X LORSQUE SA BORNE SUPÉRIEURE (RESP. INFÉRIEURE) SUR X EST $< +\infty$ (RESP. $> -\infty$).

ON DIT QUE f EST *BORNÉE* SUR X SI ELLE EST À LA FOIS MAJORÉE ET MINORÉE.

Il est immédiat que $\inf\limits_{x \in X} f(x) = -\sup\limits_{x \in X} (-f(x))$; cette relation permet souvent de se limiter à l'étude des bornes supérieures.

Z Dire que f est bornée sur X équivaut à dire qu'il existe $a, b \in \mathbf{R}$ tels que pour tout $x \in X$ on ait $a \leqslant f(x) \leqslant b$. Donc si f est bornée sur X, elle est finie sur X; mais par contre f peut être finie sur X sans être bornée :

C'est le cas pour l'application $x \longrightarrow x^2$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

PROPOSITION 2-3. — *Soit (f_i) une famille finie d'éléments de $\mathscr{F}(E, \mathbf{R})$; on a :*

$$\sup_{x \in X} \sum_i f_i(x) \leqslant \sum_i \sup_{x \in X} f_i(x)$$

Et si les f_i sont $\geqslant 0$, on a :

$$\sup_{x \in X} \prod_i f_i(x) \leqslant \prod_i \sup_{x \in X} f_i(x)$$

Démontrons par exemple la première relation; on a :

$$f_i(x) \leqslant \sup_{x \in X} f_i(x) \qquad \text{d'où} \quad \sum_i f_i(x) \leqslant \sum_i \sup_{x \in X} f_i(x)$$

d'où la relation cherchée.

3. — *Enveloppes supérieure et inférieure d'une famille de fonctions*

Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions numériques sur un ensemble E. Pour qu'une fonction numérique g majore cette famille, il faut et il suffit que pour tout $x \in E$ on ait $f_i(x) \leqslant g(x)$ pour tout $i \in I$. Parmi ces fonctions g il en existe donc une plus petite que toutes les autres, à savoir la fonction f définie par $f(x) = \sup\limits_{i \in I} f_i(x)$; autrement dit l'ensemble ordonné $\mathscr{F}(E, \overline{\mathbf{R}})$ est complètement réticulé.

Définition 3-1. — ON APPELLE *ENVELOPPE SUPÉRIEURE* DE LA FAMILLE $(f_i)_{i \in I}$, ET ON NOTE $\sup\limits_{i \in I} f_i$ LA FONCTION f TELLE QUE

$$f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x) \qquad \text{POUR TOUT } x \in E.$$

ON DÉFINIT DE MÊME L'ENVELOPPE INFÉRIEURE $\inf\limits_{i \in I} f_i$.

REMARQUE. — On notera la similitude des notations pour la borne supérieure d'une fonction et l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions ; cette similitude n'a rien de fortuit puisque les deux formules représentent la

borne supérieure d'une partie d'un ensemble ordonné complètement réticulé, à savoir $\overline{\mathbf{R}}$ dans le premier cas, $\mathcal{F}(E, \overline{\mathbf{R}})$ dans le second.

EXEMPLES. — 1° Soit f_n l'application $x \longrightarrow \sin 2\pi n x$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$; l'enveloppe supérieure de la famille $(f_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est une fonction f telle que $f(x) = 1$ si x est irrationnel ou égal à une fraction irréductible de la forme $p/4q$, et $f(x) \neq 1$ ailleurs.

2° Soit φ_A la fonction caractéristique d'un ensemble fermé $A \subset \mathbf{R}$. Cette fonction est l'enveloppe inférieure des fonctions continues qui sont partout $\geqslant \varphi_A$.

3-2. *Interprétation géométrique.* — Pour toute $f \in \mathcal{F}(E, \overline{\mathbf{R}})$, soit $A(f)$ l'ensemble des points de l'espace produit $E \times \overline{\mathbf{R}}$ qui sont situés au-dessus du graphe de f, autrement dit des points (x, y) tels que $y \geqslant f(x)$.

Se donner $A(f)$ équivaut à se donner f. Il est immédiat que pour toute famille $(f_i)_{i \in I}$ on a :

$$A(\sup_{i \in I} f_i) = \bigcap_i A(f_i).$$

De même lorsque I est fini on a :

$$A(\inf_{i \in I} f_i) = \bigcup_i A(f_i).$$

Lorsque I est infini, le premier membre de cette dernière relation contient encore le second, mais ne lui est plus nécessairement identique.

ENVELOPPE SUPÉRIEURE DANS $\mathcal{F}(E, \mathbf{R})$. FAMILLES UNIFORMÉMENT MAJORÉES. — *a*) Si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille finie de fonctions numériques finies, son enveloppe supérieure est encore finie; mais si I est infinie, son enveloppe supérieure peut ne pas être finie; pour qu'elle le soit, il faut et il suffit que pour tout x, la famille des nombres $(f_i(x))_{i \in I}$ soit majorée.

b) Si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille de fonctions numériques dont chacune est majorée, ceci n'entraîne pas que $\sup_{i \in I} f_i$ soit majorée.

Par exemple la famille (f_n) des applications constantes $x \longrightarrow n$ de E quelconque dans $\mathbf{R}$ est constituée de fonctions bornées, mais son enveloppe supérieure n'est pas majorée.

Lorsque $\sup_{i \in I} f_i$ est majorée, on dit que la famille $(f_i)_{i \in I}$ est *uniformément majorée*; ceci revient à dire qu'il existe un nombre fini λ tel que $f_i(x) \leqslant \lambda$ pour tout $i \in I$ et tout $x \in E$.

On définit de même les familles *uniformément minorées*. Une famille uniformément majorée et minorée est dite *uniformément bornée*.

DÉFINITION DE f^+ ET f^-. — Pour toute fonction numérique f, on pose $f^+ = \sup(f, 0)$. Autrement dit f^+ est défini par la relation :

$$f^+(x) = (f(x))^+ \quad \text{pour tout } x \in E.$$

De même on pose

$$f^- = \sup(-f, 0) = (-f)^+.$$

Il faut bien remarquer que l'on a toujours $f^+ \geqslant 0$ et $f^- \geqslant 0$.

Des relations connues pour les nombres réels :

$$a = a^+ - a^-; \qquad |a| = a^+ + a^-,$$

il résulte que

$$f = f^+ - f^-; \qquad |f| = f^+ + f^-.$$

On en tire

$$f^+ = \tfrac{1}{2}(|f| + f); \qquad f^- = \tfrac{1}{2}(|f| - f).$$

Plus généralement on a :

$$\sup(f, g) = \tfrac{1}{2}[(f+g) + |f-g|]; \qquad \inf(f, g) = \tfrac{1}{2}[(f+g) - |f-g|].$$

Il en résulte aussitôt :

$$\sup(f, g) + \inf(f, g) = f + g.$$

II. — NOTIONS DE LIMITE ASSOCIÉES AUX FONCTIONS NUMÉRIQUES

A toute $f \in \mathscr{F}(\mathrm{E}, \overline{\mathbf{R}})$ et à tout $x \in \mathrm{E}$ est associé l'élément $f(x)$ de $\overline{\mathbf{R}}$. Comme $\overline{\mathbf{R}}$ est un espace topologique, à toute suite d'éléments de E ou de $\mathscr{F}(\mathrm{E}, \overline{\mathbf{R}})$ ou plus généralement à toute base de filtre sur E ou $\mathscr{F}(\mathrm{E}, \overline{\mathbf{R}})$ on va donc pouvoir associer des éléments-limites.

Nous examinerons d'abord les notions associées à une base de filtre sur E, puis celles associées à une base de filtre sur $\mathscr{F}(\mathrm{E}, \mathbf{R})$.

4. — *Limites supérieure et inférieure d'une fonction suivant une base de filtre sur* E

Soit f une fonction numérique sur E, et soit $\mathscr{B}$ une base de filtre sur E. Nous avons défini au chapitre V, paragraphe 8, l'adhérence de f suivant $\mathscr{B}$; c'est l'ensemble :

$$\bar{f}(\mathscr{B}) = \bigcap_{\mathrm{B} \in \mathscr{B}} \overline{f(\mathrm{B})}.$$

Comme la famille des $\overline{f(\mathrm{B})}$ possède la propriété de l'intersection finie (chap. V, § 11), et comme $\overline{\mathbf{R}}$ est compact, $\bar{f}(\mathscr{B})$ n'est pas vide. Comme en outre toute partie non-vide de $\overline{\mathbf{R}}$ a une borne supérieure, on peut poser la définition suivante :

Définition 4-*1*. — ON APPELLE *LIMITE SUPÉRIEURE* DE f SUIVANT LA BASE DE FILTRE $\mathscr{B}$ LA BORNE SUPÉRIEURE DE L'ENSEMBLE $\bar{f}(\mathscr{B})$. ON LA NOTE

$$\overline{\lim_{\mathscr{B}}}\, f \quad \text{ou} \quad \limsup_{\mathscr{B}} f.$$

On définirait de la même façon la limite inférieure.

CAS PARTICULIERS. — 1° Soit (x_n) une suite de points de E; les ensembles $B_n = \{x_i : i \geqslant n\}$ constituent une base de filtre $\mathcal{B}$ sur E. La limite supérieure de f suivant $\mathcal{B}$ s'appelle aussi la limite supérieure de la suite $(f(x_n))$.

2° Supposons E muni d'une topologie ; soit A une partie non-vide de E, et soit $a \in \bar{A}$. Désignons par $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties de E de la forme $A \cap V$, où V est un voisinage de a ; comme $a \in \bar{A}$, il est clair que $\mathcal{B}$ est une base de filtre.

On note $\limsup_{\mathcal{B}} f$ par $\limsup_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$, ou $\limsup_{x \to a} f(x)$ si $A = E$.

Par exemple si $E = [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ et si $A =]\alpha, \beta]$, $\limsup_{\mathcal{B}} f$ s'appelle la limite supérieure de f à droite au point a.

3° Supposons que E soit un ensemble ordonné filtrant croissant, c'est-à-dire tel que toute partie finie de E soit majorée; et supposons que f soit une application croissante de E dans $\bar{\mathbf{R}}$.

Si $\mathcal{B}$ désigne l'ensemble des parties de E de la forme $\{x : x \geqslant a\}_{a \in E}$, on vérifiera que $\mathcal{B}$ est une base de filtre et que :

$$\lim_{\mathcal{B}} f = \limsup_{\mathcal{B}} f = \sup_{x \in E} f(x) .$$

PROPRIÉTÉS IMMÉDIATES. — 1° La limite supérieure de f suivant $\mathcal{B}$ appartient à l'adhérence de f suivant $\mathcal{B}$

2° $$\liminf_{\mathcal{B}} f = -\limsup_{\mathcal{B}} (-f).$$

LEMME 4-2. — *Soit f une application d'un ensemble E dans un espace compact X ; soit $\mathcal{B}$ une base de filtre sur E, et soit $\bar{f}(\mathcal{B})$ l'adhérence de f suivant $\mathcal{B}$.*

Alors pour tout ouvert ω de X tel que $\bar{f}(\mathcal{B}) \subset \omega$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $\overline{f(B)} \subset \omega$.

En effet les traces des fermés $\overline{f(B)}$ sur le compact $\complement \omega$ ont pour intersection $\bar{f}(\mathcal{B}) \cap \complement \omega = \emptyset$; donc il existe une famille finie $(\overline{f(B_i)})$ de ces fermés dont l'intersection ne rencontre pas $\complement \omega$; or il existe un $B \in \mathcal{B}$ contenu dans $\bigcap B_i$; c'est le B cherché.

PROPOSITION 4-3. — *Si f est une fonction numérique sur E, dire que f converge vers a suivant une base de filtre $\mathcal{B}$ équivaut à dire que*

$$a = \limsup_{\mathcal{B}} f = \liminf_{\mathcal{B}} f, \quad \textit{ou encore} \quad \{a\} = \bar{f}(\mathcal{B}).$$

En effet si $a = \lim_{\mathcal{B}} f$, tout voisinage fermé V de a dans $\bar{\mathbf{R}}$ contient un ensemble $f(B)$, donc aussi $\overline{f(B)}$; donc $\bar{f}(\mathcal{B}) \subset V$; il en résulte que $\bar{f}(\mathcal{B}) = \{a\}$.

Inversement, si $\{a\} = \overline{f}(\mathscr{B})$, pour tout voisinage V de a, il existe d'après le lemme 4-2 un $B \in \mathscr{B}$ tel que $\overline{f(B)} \subset V$, donc f converge vers a suivant $\mathscr{B}$.

PROPOSITION 4-4. — *Soit f une application d'un espace topologique* E *dans* **R**. *Pour tout $a \in E$, l'oscillation de f au point a (voir* **16**-9, *Ch. V) est l'élément de* $\overline{\mathbf{R}_+}$ *défini par :*

$$\omega(f, a) = \left(\limsup_{x \to a} f(x) - \liminf_{x \to a} f(x)\right).$$

En effet chacun des deux membres est égal à la limite, suivant la base de filtre des voisinages V de a, de :

$$\delta\left(f(V)\right) = \sup f(V) - \inf f(V).$$

COROLLAIRE 4-5. — *Soit $f \in \mathscr{F}(E, \mathbf{R})$, où* E *est un espace topologique. Dire que f est continue en a équivaut à dire que l'oscillation de f en a est nulle.*

C'est une conséquence immédiate de la proposition 4-3.

PROPOSITION 4-6. — *Soient $f, g \in \mathscr{F}(E, \overline{\mathbf{R}})$ avec $f \leqslant g$; et soit $\mathscr{B}$ une base de filtre sur* E *; on a les inégalités :*

$$\limsup_{\mathscr{B}} f \leqslant \limsup_{\mathscr{B}} g\,; \qquad \liminf_{\mathscr{B}} f \leqslant \liminf_{\mathscr{B}} g\,.$$

Désignons en effet les deux membres de la première inégalité par α et β respectivement.

Si $\beta = +\infty$, la première relation est vérifiée.

Si $\beta < +\infty$, le lemme 4-2 montre que pour tout k tel que $\beta < k$, il existe $B \in \mathscr{B}$ tel que $g(B) < k$, donc aussi $f(B) < k$, donc $\overline{f(B)} \leqslant k$, donc $\alpha \leqslant k$; comme cette relation est vraie pour tout $k > \beta$, on a bien $\alpha \leqslant \beta$.

La seconde inégalité se déduit de la première en y remplaçant f par $(-g)$, et g par $(-f)$.

COROLLAIRE 4-7. — *Si $f \leqslant g$ et si f, g ont respectivement pour limite α et β suivant $\mathscr{B}$, on a $\alpha \leqslant \beta$.*

Z La compacité de X est essentielle pour la validité du lemme 4-2 ; aussi les conséquences que nous en avons tirées pour $\overline{\mathbf{R}}$ ne s'étendent-elles pas à **R** :

Par exemple, la fonction numérique finie g définie sur **R** par :

$$g(x) = 1/x \quad \text{si} \quad x > 0\,; \qquad g(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \leqslant 0$$

n'a dans **R** que 0 pour valeur d'adhérence au point 0, bien qu'elle ne soit pas continue en 0.

De même, si on désigne par f l'enveloppe inférieure de g et 1, on a $f \leqslant g$ et cependant dans **R** les ensembles de valeurs d'adhérence de f et g au point 0 sont respectivement $\{0, 1\}$ et $\{0\}$.

5. — *Limites supérieure et inférieure d'une famille de fonctions*

Soit $(f_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille d'éléments de $\mathscr{F}(\mathrm{E}, \overline{\mathbf{R}})$ et soit $\mathscr{B}$ une base de filtre sur I.

Pour tout $x \in \mathrm{E}$, l'application $\varphi_x : i \longrightarrow f_i(x)$ de I dans $\overline{\mathbf{R}}$ a une adhérence $\overline{\varphi_x}(\mathscr{B})$ suivant $\mathscr{B}$.

Toute application f de E dans $\overline{\mathbf{R}}$ telle que $f(x) \in \overline{\varphi_x}(\mathscr{B})$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ est dite valeur d'adhérence de la famille (f_i) suivant $\mathscr{B}$.

L'ensemble de ces valeurs d'adhérence contient ses bornes inférieure et supérieure qui ne sont autres que les applications

$$x \longrightarrow \liminf_{\mathscr{B}} f_i(x) \quad \text{et} \quad x \longrightarrow \limsup_{\mathscr{B}} f_i(x)\,.$$

On les notera $\quad \liminf_{\mathscr{B}} (f_i) \quad$ et $\quad \limsup_{\mathscr{B}} (f_i)\,.$

PROPOSITION 5-*1*. — *Soient* $(f_i)_{i \in \mathrm{I}}$ et $(g_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *deux familles d'éléments de* $\mathscr{F}(\mathrm{E}, \overline{\mathbf{R}})$ *; et soit* $\mathscr{B}$ *une base de filtre sur* I.

Si pour tout $i \in \mathrm{I}$ *on a* $f_i \leqslant g_i$, *on a aussi*

$$\limsup_{\mathscr{B}} (f_i) \leqslant \limsup_{\mathscr{B}} (g_i)\,; \qquad \liminf_{\mathscr{B}} (f_i) \leqslant \liminf_{\mathscr{B}} (g_i)\,.$$

En effet, pour tout $x \in \mathrm{E}$, la proposition 4-*6* appliquée à φ_x montre que, par exemple

$$\limsup_{\mathscr{B}} f_i(x) \leqslant \limsup_{\mathscr{B}} g_i(x)\,.$$

Z 1° Si pour tout i on a $f_i < g_i$, c'est-à-dire $f_i(x) < g_i(x)$ pour tout i et pour tout x, cette inégalité stricte ne passe pas à la limite, c'est-à-dire que l'on n'a pas en général :

$$\limsup_{\mathscr{B}} f_i < \limsup_{\mathscr{B}} g_i\,.$$

2° Il n'existe pas en général de sous-suite convergente (f_{n_p}) de la suite (f_n) dont la limite soit égale à $\limsup (f_n)$. Il suffit, pour le voir, de poser $f_n(x) = (-1)^n x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

6. — *Opérations sur les fonctions continues*

PROPOSITION 6-*1*. — *Soit* E *un espace topologique et soit* $a \in \mathrm{E}$. *La partie* A *de* $\mathscr{F}(\mathrm{E}, \mathbf{R})$ *constituée par les fonctions continues en* a *est une sous-algèbre réticulée de* $\mathscr{F}(\mathrm{E}, \mathbf{R})$.

En effet, de la continuité de l'addition et de la multiplication sur $\mathbf{R}$ résulte que si f et g sont continues en a, il en est de même de $(f+g)$, de fg, et de λf pour tout scalaire λ. D'autre part l'application $\varphi : u \longrightarrow |u|$ de $\mathbf{R}$

dans $\mathbf{R}$ est continue, donc pour tout $f \in A$, $|f| = \varphi \circ f$ est aussi dans A. Donc plus généralement la relation :

$$\sup(f, g) = \tfrac{1}{2}[(f+g) + |f-g|]$$

montre que si $f, g \in A$, on a aussi $\sup(f, g) \in A$. Cette conclusion s'étend évidemment aux enveloppes supérieure et inférieure de toute famille finie d'éléments de A.

PROPOSITION 6-2. — *Soit* E *un espace métrique, et soient* U (*resp.* L) *la partie de* $\mathscr{F}(E, \mathbf{R})$ *constituée par les fonctions uniformément continues (resp. lipschitziennes) sur* E.

Alors U *et* L *sont deux sous-espaces vectoriels réticulés de* $\mathscr{F}(E, \mathbf{R})$.

La démonstration se calque sur la précédente en remarquant que les applications $(u, v) \longrightarrow (u+v)$ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ et $u \longrightarrow |u|$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ sont lipschitziennes (donc aussi uniformément continues).

Z Il est inexact que U et L soient stables par multiplication. Par exemple la fonction numérique $x \longrightarrow x$ appartient à U et L, mais son carré $x \longrightarrow x^2$ n'y appartient pas.

PROPOSITION 6-3. — *Soit* $(f_i)_{i \in I}$ *une famille quelconque d'éléments de* $\mathscr{F}(E, \mathbf{R})$ *et soit f son enveloppe supérieure.*

Si chaque f_i est lipschitzienne de rapport k, et si f est finie en au moins un point, f est partout finie, et est lipschitzienne de rapport k.

En effet, pour tous $x, y \in E$, on a par hypothèse

$$f_i(y) \leqslant k\,d(x, y) + f_i(x)$$

donc aussi

$$f(y) \leqslant k\,d(x, y) + f(x)$$

Donc si $f(x) < \infty$, on a aussi $f(y) < \infty$, donc $f(y)$ est fini. On peut donc écrire, pour tous $x, y \in E$:

$$f(y) - f(x) \leqslant k\,d(x, y) \quad \text{et de même} \quad f(x) - f(y) \leqslant k\,d(x, y).$$

Donc f est bien lipschitzienne de rapport k.

On a évidemment un énoncé analogue pour l'enveloppe inférieure.

EXEMPLE. — Soit E un espace métrique, et soit $A \subset E$.

Pour tout $x \in E$, on pose

$$f(x) = \sup_{a \in A} d(x, a)\,; \quad g(x) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Chacune des fonctions $x \longrightarrow d(x, a)$ est lipschitzienne de rapport 1 ; donc g est lipschitzienne de rapport 1, et si f est finie en un point (ce qui équivaut à dire que A est borné), f est finie partout, et est lipschitzienne de rapport 1.

Z Il est faux qu'une enveloppe supérieure ou inférieure de fonctions uniformément continues soit uniformément continue. Elle peut même ne pas être continue ; par exemple la famille des fonctions $1/(1+x^2)^n$ sur $[0, 1]$ a une enveloppe inférieure non continue. Pour retrouver un énoncé de ce type, il faudrait supposer que la famille (f_i) ait une propriété supplémentaire, par exemple soit également continue.

Nous verrons au paragraphe suivant que les enveloppes supérieures ou inférieures de familles de fonctions continues, tout en n'étant pas nécessairement continues, possèdent encore des propriétés remarquables.

III. — FONCTIONS NUMÉRIQUES SEMI-CONTINUES

Soit f une fonction numérique définie dans un espace topologique E. Dire que f est continue en $a \in$ E équivaut à dire que chacune des conditions suivantes est réalisée :

1° Pour tout $\lambda < f(a)$ il existe un voisinage V de a tel que $\lambda < f(V)$.

2° Pour tout $\lambda > f(a)$ il existe un voisinage V de a tel que $\lambda > f(V)$.

Lorsqu'on ne retient que l'une de ces conditions, on est conduit à la notion de semi-continuité.

7. — *Semi-continuité en un point*

Définition 7-*1*. — Soit E un espace topologique, et soit $f \in \mathscr{F}(E, \overline{\mathbf{R}})$. On dira que f est semi-continue *inférieurement* au point a de E si, pour tout $\lambda < f(a)$ il existe un voisinage V de a tel que $\lambda < f(V)$.

Lorsque cette condition est réalisée pour tout point a de E, on dit que f est semi-continue inférieurement dans E.

La définition de la semi-continuité supérieure s'obtient en changeant le sens des inégalités.

Il est immédiat que la semi-continuité inférieure de f en a équivaut à la semi-continuité supérieure de $-f$ au même point. Cette remarque nous permettra de ne formuler la plupart de nos énoncés que pour les fonctions semi-continues inférieurement.

Exemples. — 1° Soit f_n l'application de **R** dans **R** telle que $f(0) = 0$ et $f(x) = x^{-n}$ pour $x \neq 0$.

Pour tout n entier pair, f_n est semi-continue inférieurement au point 0.

Pour tout n entier impair, f_n n'est semi-continue, ni inférieurement, ni supérieurement au point 0.

2° Soit f l'application de **R** dans **R** telle que $f(x) = 0$ si x est rationnel, et $f(x) = 1$ si x est irrationnel.

La fonction f est semi-continue inférieurement en tout point rationnel, et semi-continue supérieurement en tout point irrationnel

PROPOSITION 7-2. — *Dire que f est semi-continue inférieurement en a équivaut à dire que*

$$f(a) = \liminf_{x \to a} f(x).$$

DÉMONSTRATION. — a) Supposons f semi-continue inférieurement en a, et soit $\lambda < f(a)$. Il existe alors un voisinage V de a tel que $\lambda \leqslant f(V)$; on a donc aussi :

$$\lambda \leqslant \overline{f(V)}, \quad \text{d'où} \quad \lambda \leqslant \liminf_{x \to a} f(x).$$

Comme cette relation a lieu pour tout $\lambda < f(a)$, on a aussi

$$f(a) \leqslant \liminf_{x \to a} f(x).$$

Mais l'inégalité inverse est vraie aussi puisque $f(a) \in f(V)$ pour tout V ; d'où l'égalité cherchée.

b) Inversement, supposons $f(a) = \liminf_{x \to a} f(x)$. Pour tout $\lambda < f(a)$ il existe d'après le lemme 4-2 un voisinage V de a tel que $\lambda < f(V)$. C'est dire que f est semi-continue inférieurement en a.

PROPOSITION 7-3. — *L'ensemble $\mathscr{I}(a)$ des fonctions semi-continues inférieurement en a et $> -\infty$ est stable par addition.*

En effet, soient $f, g \in \mathscr{I}(a)$, et soit $\lambda < f(a) + g(a)$. On peut écrire $\lambda = \alpha + \beta$, où $\alpha < f(a)$ et $\beta < g(a)$. Il existe alors un voisinage U de a tel que $\alpha < f(U)$, et un voisinage V de a tel que $\beta < g(V)$. On a donc aussi :

$$\lambda = \alpha + \beta < (f+g)(x) \quad \text{pour tout } x \in U \cap V.$$

Ceci démontre que $f + g \in \mathscr{I}(a)$.

COROLLAIRE 7-4. — *Le sous-ensemble de $\mathscr{F}(E, \mathbf{R})$ constitué par les fonctions semi-continues inférieurement en a est un cône convexe.*

Nous allons arrêter ici l'étude de la semi-continuité en un point pour étudier le cas beaucoup plus intéressant de la semi-continuité dans tout l'espace.

8. — Fonctions semi-continues inférieurement dans tout l'espace

Pour qu'une application f d'un espace E dans un espace F soit continue dans E, il faut et il suffit que l'image réciproque par f de tout ensemble fermé de F soit un fermé de E. Nous allons voir qu'il existe une caractérisation analogue des fonctions semi-continues.

PROPOSITION 8-*1*. — *Dire qu'une application f d'un espace E dans $\overline{\mathbf{R}}$ est semi-continue inférieurement dans E, équivaut à dire que pour tout $\lambda \in \overline{\mathbf{R}}$, l'ensemble des x tels que $f(x) \leqslant \lambda$ est fermé (ou, ce qui revient au même, que l'ensemble des x tels que $\lambda < f(x)$ est ouvert).*

En effet, la semi-continuité inférieure de f en un point a, équivaut à dire que, pour tout $\lambda < f(a)$, l'ensemble des x tels que $\lambda < f(x)$ est un voisinage de a ; autrement dit à ce que pour tout λ, l'ensemble des x tels que $\lambda < f(x)$ est voisinage de chacun de ses points, donc est ouvert.

COROLLAIRE 8-*2*. — *Soit φ_A la fonction caractéristique d'une partie A de E. Dire que φ_A est semi-continue inférieurement équivaut à dire que A est ouvert.*

En effet l'ensemble des x tels que $\lambda < \varphi_A(x)$ est, soit ϕ si $\lambda \geqslant 1$, soit A si $\lambda < 1$.

De même, dire que φ_A est semi-continue supérieurement équivaut à dire que A est fermé.

Interprétation géométrique de la semi-continuité inférieure. — Au n° 3-2, nous avons associé à toute application d'un ensemble E dans $\overline{\mathbf{R}}$ une partie A (f) de l'espace produit $\mathrm{E} \times \overline{\mathbf{R}}$.

Nous allons interpréter simplement la semi-continuité inférieure au moyen de A (f) (voir fig. 6).

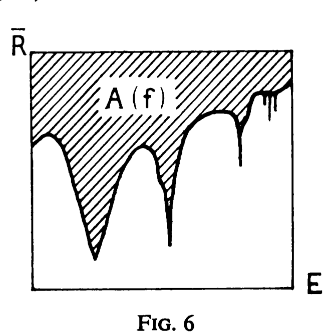


FIG. 6

PROPOSITION 8-*3*. — *Dire qu'une application f d'un espace topologique E dans $\overline{\mathbf{R}}$ est semi-continue inférieurement, équivaut à dire que A (f) est fermé dans $\mathrm{E} \times \overline{\mathbf{R}}$.*

DÉMONSTRATION. — Dire que A (f) est fermé équivaut à dire que son complémentaire est ouvert, ou encore que ce complémentaire $\complement$ A (f) est voisinage de chacun de ses points.

Dire que f est semi-continue inférieurement dans E équivaut à dire que pour tout couple (a, λ) tel que $\lambda < f(a)$ (c'est-à-dire pour tout $(a, \lambda) \in \complement$ A (f)) et pour tout μ vérifiant $\lambda < \mu < f(a)$, on a $\mu < f(x)$ pour tout x dans un voisinage V de a. Autrement dit ceci équivaut à dire qu'il existe un voisinage de (a, λ) (à savoir $V \times [-\infty, \mu[$) contenu dans $\complement$ A (f).

L'équivalence annoncée est donc bien démontrée.

Opérations sur les fonctions semi-continues. — La proposition 7-*3* nous montre que la classe des fonctions semi-continues inférieurement est stable par addition ; nous allons voir qu'elle est stable aussi par d'autres opérations.

PROPOSITION **8**-*4*. — *Soit f une application semi-continue inférieurement d'un espace* E *dans un intervalle* $[\alpha, \beta]$ *de* $\overline{\mathbf{R}}$, *et soit* φ *une application croissante et continue de* $[\alpha, \beta]$ *dans* $\overline{\mathbf{R}}$. *La fonction composée* $g = \varphi \circ f$ *est alors semi-continue inférieurement.*

C'est une conséquence directe de la proposition 8-*1* ; car pour tout λ, $\varphi^{-1}([-\infty, \lambda])$ est de la forme $([\alpha, \mu])$; et $f^{-1}([\alpha, \mu])$ est fermé puisque cet ensemble est identique à $f^{-1}([-\infty, \mu])$. Or cet ensemble n'est autre que $g^{-1}([-\infty, \lambda])$, d'où la proposition.

COROLLAIRE **8**-*5*. — *Si f et g sont* > 0 *et semi-continues inférieurement dans* E, *fg l'est aussi.*

Appliquons en effet la proposition 8-*4* en prenant successivement pour φ un logarithme et une exponentielle :

Log f et Log g sont $> -\infty$ et semi-continues inférieurement ; donc Log fg = (Log f + Log g) l'est aussi, donc aussi fg.

THÉORÈME **8**-*6*. — *L'enveloppe supérieure de toute famille* $(f_\iota)_{\iota \in I}$ *de fonctions numériques semi-continues inférieurement est aussi semi-continue inférieurement.*

L'enveloppe inférieure de toute famille ***finie*** *de fonctions numériques semi-continues inférieurement est aussi semi-continue inférieurement.*

C'est une conséquence immédiate de la proposition 8-*3* et des formules du n° 3-*2*.

En effet, si chaque A (f_i) est fermé, $\bigcap$ A (f_i) est aussi fermé, donc sup (f_i) est semi-continue inférieurement. De même si I est fini, $\bigcup$ A (f_i) est fermé donc inf f_i est semi-continue inférieurement.

Cas particulier. — L'enveloppe supérieure de toute famille de fonctions *continues* est semi-continue inférieurement.

Plus particulièrement, si f_n est une suite croissante de fonctions numériques continues, sa limite f est identique à $\sup f_n$, donc f est semi-continue inférieurement. La réciproque de cette propriété est étudiée dans les exercices 9 et 10.

On a des énoncés analogues pour la semi-continuité supérieure en remplaçant l'enveloppe supérieure par l'enveloppe inférieure et inversement.

Z Le théorème 8-*6* ne s'étend pas à l'enveloppe inférieure de toute famille infinie de fonctions semi-continues inférieurement.

En effet, soit f une fonction numérique *quelconque* dans E. Elle est l'enveloppe inférieure des fonctions f_a ainsi définies :

$$f_a(x) = +\infty \quad \text{pour } x \neq a; \quad f_a(a) = f(a).$$

Et il est immédiat que chacune des fonctions f_a est semi-continue inférieurement.

9. — Construction de fonctions semi-continues inférieurement

Les fonctions semi-continues sont au moins aussi proches de notre expérience sensible que les fonctions continues. Un exemple nous le fera comprendre.

Lorsque nous regardons un objet opaque, nous n'apercevons qu'un seul point de cet objet sur toute une demi-droite issue de notre œil; la distance de ce point à notre œil est fonction de la direction de cette demi-droite; cette fonction n'est pas continue, mais semi-continue inférieurement, si nous admettons que l'objet considéré est un ensemble fermé.

Cet exemple, convenablement généralisé, est d'ailleurs susceptible de fournir les fonctions semi-continues les plus générales.

En effet, E étant un espace topologique, soit A une partie fermée du produit $E \times \overline{\mathbf{R}}$. Pour tout $x \in E$ soit $f_A(x)$ la borne inférieure des ordonnées des points de A d'abscisse x (ou $+\infty$ s'il n'y a aucun tel point).

On montre aisément que la fonction f_A ainsi définie est semi-continue inférieurement. Inversement, d'après la proposition 8-*3*, toute fonction semi-continue inférieurement sur E peut être obtenue par ce procédé.

Exemple. — Soit g une application quelconque d'un espace topologique E dans $\overline{\mathbf{R}}$; et soit Γ le graphe de g. L'ensemble $\overline{\Gamma}$ est une partie fermée de $E \times \overline{\mathbf{R}}$. La fonction $f_{\overline{\Gamma}}$ associée à $\overline{\Gamma}$ par le procédé ci-dessus est semi-continue inférieurement; on vérifiera aisément que, pour tout $x \in E$, on a :

$$f_{\overline{\Gamma}}(x) = \liminf_{t \to x} g(t)$$

De même la fonction $\limsup_{t \to x} g(t)$ est semi-continue supérieurement. Leur différence $\omega(f\,;\,x)$ est donc semi-continue supérieurement.

10. — Fonctions semi-continues sur un espace compact

THÉORÈME **10**-*1*. — *Pour toute application semi-continue inférieurement f d'un espace compact* E *dans* $\overline{\mathbf{R}}$, *il existe au moins un point a de* E *tel que*

$$f(a) = \inf_{x \in E} f(x).$$

En effet posons $$m = \inf_{x \in E} f(x).$$

Pour tout $\lambda > m$ l'ensemble E_λ des x tels que $f(x) \leqslant \lambda$ est fermé et non-vide.

D'autre part, la famille des E_λ est totalement ordonnée par inclusion, car E_λ est une fonction croissante de λ; donc (chap. V, proposition 11-*4*) l'intersection des E_λ n'est pas vide. En tout point a de cette intersection on a $f(a) \leqslant \lambda$ pour tout $\lambda > m$, d'où $f(a) \leqslant m$.

Comme d'autre part $f \geqslant m$ par définition de m, on a bien $f(a) = m$.

COROLLAIRE **10**-*2*. — *Toute application f semi-continue inférieurement d'un espace compact* E *dans* $]-\infty, +\infty]$ *est minorée dans* E.

En effet on a alors $m = f(a) > -\infty$ donc $f \geqslant f(a) > -\infty$.

On a des énoncés analogues pour les fonctions semi-continues supérieurement.

Si on applique ces résultats à une fonction continue on retrouve un énoncé antérieur affirmant qu'une fonction continue sur un espace compact y atteint sa borne inférieure et sa borne supérieure.

Nous allons étudier maintenant une application importante de ces résultats au calcul des variations.

11. — Semi-continuité de la longueur

La longueur d'une courbe est une fonction de cette courbe; lorsque celle-ci varie continûment, en un sens que nous préciserons, on pourrait s'attendre à ce que sa longueur varie aussi continûment. Il n'en est rien, comme le montre l'exemple élémentaire suivant :

Soit C_n la courbe plane d'équation $y = n^{-1} \sin nx$, où $0 \leqslant x \leqslant \pi$ et $n \in \mathbf{N}^*$ (en axes rectangulaires).

Il est immédiat que toutes ces courbes ont la même longueur et que c'est un nombre $l > \pi$. Or lorsque $n \to +\infty$, ces courbes convergent uniformément vers le segment $[0, \pi]$. Donc cette convergence uniforme n'entraîne pas la convergence de la longueur.

On pourrait modifier cet exemple et remplacer l par n'importe quel nombre $\geqslant \pi$. Mais il est remarquable qu'on ne peut remplacer l par un nombre $< \pi$.

Autrement dit, la limite inférieure des longueurs des courbes qui convergent vers le segment $[0, \pi]$ est égale à π. Ce n'est pas là autre chose que la semi-continuité inférieure, que nous allons maintenant préciser.

Espace des courbes paramétrées. — Soit T un intervalle compact de **R** et soit E un espace métrique. D'après une définition antérieure (chap. V, § 24) toute application continue f de T dans E définit une courbe paramétrée. On peut donc considérer l'ensemble $\mathscr{C}(\mathrm{T}, \mathrm{E})$ des applications continues de T dans E comme l'ensemble des courbes paramétrées de E définies sur T.

On prendra comme topologie sur $\mathscr{C}(\mathrm{T}, \mathrm{E})$ la topologie associée à la métrique de la convergence uniforme, définie par

$$d(f, g) = \sup_{t \in \mathrm{T}} d\big(f(t), g(t)\big).$$

Pour toute $f \in \mathscr{C}(\mathrm{T}, \mathrm{E})$ on désignera par $\mathrm{L}(f)$ la longueur de la courbe définie par f. Nous avons donc là une fonction numérique définie sur l'espace topologique $\mathscr{C}(\mathrm{T}, \mathrm{E})$.

THÉORÈME **11**-*1*. — *La longueur* $\mathrm{L}(f)$ *est une fonction semi-continue inférieurement de* f *dans* $\mathscr{C}(\mathrm{T}, \mathrm{E})$.

DÉMONSTRATION. — Pour toute partie finie $\sigma = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ de T, où $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, et pour toute $f \in \mathscr{C}(\mathrm{T}, \mathrm{E})$, posons

$$\mathrm{V}_\sigma(f) = \sum_i d\big(f(t_i), f(t_{i+1})\big).$$

Pour tout $a \in \mathrm{T}$, l'application $f \longrightarrow f(a)$ de $\mathscr{C}(\mathrm{T}, \mathrm{E})$ dans E est continue, donc pour tout σ, l'application $f \longrightarrow \mathrm{V}_\sigma(f)$ est continue.

Or $\mathrm{L}(f) = \sup_\sigma \mathrm{V}_\sigma(f)$ (voir chap. V, n° 24), donc L est enveloppe supérieure des fonctions continues V_σ; elle est donc semi-continue inférieurement d'après le théorème **8**-*6*.

COROLLAIRE **11**-*2*. — *L'application* $f \to$ *(variation totale de* f*) de* $\mathscr{C}(\mathrm{T}, \mathbf{R})$ *dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *est semi-continue inférieurement.*

Application au calcul des variations. — Un des problèmes du calcul des variations à une variable consiste en la recherche d'une courbe appartenant à un ensemble donné de courbes et dont la longueur soit la plus petite possible.

La solution de ce problème est fournie par le lemme suivant qui résulte du rapprochement des théorèmes 10-*1* et 11-*1*.

LEMME **11-**3. — *Pour toute partie compacte* K *de* $\mathscr{C}$ (T, E), *il existe un élément* f_0 *de* K *tel que*

$$L(f_0) = \inf_{f \in K} L(f).$$

Nous sommes donc conduits à rechercher des parties compactes de $\mathscr{C}$ (T, E).

LEMME **11-**4. — *Soit* T *un intervalle* $[a, b]$ *où* $a < b$.

Pour toute $f \in \mathscr{C}$ (T, E) *telle que* $L(f) < l$, *il existe une homéomorphie croissante* α *de* [0, 1] *sur* $[a, b]$ *telle que* $f \circ \alpha$ *soit lipschitzienne de rapport* l.

DÉMONSTRATION. — Pour tout $x \in [a, b]$, soit $V(x)$ la variation totale de f sur $[a, x]$; puis posons :

$$\beta(x) = k_1 V(x) + k_2 (x - a).$$

On vérifie que si $k_1 = l^{-1}$ et $k_2 = (l - L(f))/(b-a)\,l$, l'application β est une homéomorphie croissante de $[a, b]$ sur [0, 1]. Nous désignerons par α l'application réciproque β^{-1}.

Comme un changement de variable croissant ne change pas la variation totale (proposition 24-5, chap. V), on a pour tous $x, y \in [0, 1]$ tels que $x < y$:

$$|f \circ \alpha(y) - f \circ \alpha(x)| \leqslant \text{Variation totale de } f \circ \alpha \text{ sur } [x, y]$$
$$= \text{Variation totale de } f \text{ sur } [\alpha(x), \alpha(y)]$$
$$= V(\alpha(y)) - V(\alpha(x)) \leqslant l\big(\beta(\alpha(y)) - \beta(\alpha(x))\big) = l(y-x).$$

L'inégalité $|f \circ \alpha(y) - f \circ \alpha(x)| \leqslant l(y-x)$ établit la propriété annoncée.

COROLLAIRE **11-**5. — *Pour toute famille* $(C_i)_{i \in I}$ *de courbes paramétrées de* E *de longueur* $< l$, *il existe une famille* $(C'_i)_{i \in I}$ *de courbes paramétrées appartenant à* $\mathscr{C}$ ([0, 1], E), *telles que pour tout* $i \in I$, C_i *et* C'_i *soient équivalentes par changement de variable, et que* C'_i *soit lipschitzienne de rapport* l.

Nous pouvons maintenant appliquer ces résultats à la recherche de géodésiques dans un espace métrique (en appelant géodésique de E tout arc simple rectifiable de longueur $\leqslant$ la longueur de tout arc ayant mêmes extrémités).

THÉORÈME **11-**6. — *Soit* E *un espace métrique compact, et soient* A, B *deux parties fermées disjointes de* E.

S'il existe dans E *des courbes rectifiables d'extrémités dans* A, B *respectivement, et si* k *désigne la borne inférieure de leurs longueurs, il existe aussi un arc simple de longueur* k *et d'extrémités dans* A, B *respectivement.*

En effet désignons par l un nombre fini quelconque tel que $k < l$. Soit K la partie de $\mathscr{C}$ ([0, 1], E) constituée par les applications lipschitziennes f de

rapport l telles que $f(0) \in A$ et $f(1) \in B$. Cet ensemble est également continu et fermé dans $\mathscr{C}([0,1], E)$, donc compact d'après le théorème d'Ascoli (chap. V, § 23).

Le corollaire 11-*5* montre que $k = \inf_{f \in K} L(f)$; donc d'après le lemme 11-*3*, il existe $f_0 \in K$ telle que

$$L(f_0) = \inf_{f \in K} L(f) = k.$$

Cette application f_0 n'est pas nécessairement biunivoque, mais l'utilisation d'un paramétrage intrinsèque par $[0, k]$ va faire disparaître cette insuffisance :

Pour tout $t \in [0, 1]$, soit $\varphi(t)$ la variation totale de f_0 sur $[0, t]$. Pour tous $t_1, t_2 \in [0, 1]$ on a :

$$d\big(f_0(t_1), f_0(t_2)\big) \leqslant |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|. \tag{1}$$

Donc la relation $(\varphi(t_1) = \varphi(t_2))$ entraîne $(f_0(t_1) = f_0(t_2))$, ce qui montre que f_0 est fonction de φ, c'est-à-dire de la forme $f_0 = g \circ \varphi$. L'inégalité (1) s'écrit alors :

$$d\big(g(u_1), g(u_2)\big) \leqslant |u_1 - u_2|, \qquad \text{où} \quad u_1 = \varphi(t_1) \ \text{ et } \ u_2 = \varphi(t_2).$$

Donc l'application g est lipschitzienne de rapport 1 sur $[0, k]$; on appelle g le *paramétrage intrinsèque* associé à f_0.

La variation totale de g est $\leqslant k$, mais comme on a :

$$g(0) = f_0(0) \in A \qquad \text{et} \qquad g(k) = f_0(1) \in B,$$

cette variation totale de g est $\geqslant k$; donc elle vaut exactement k, et la variation totale de g sur tout intervalle $[u_1, u_2]$ est $(u_2 - u_1)$.

Je dis que g est biunivoque; en effet s'il existait u_1, u_2 avec $u_1 < u_2$ tels que $g(u_1) = g(u_2)$, en supprimant de la courbe l'arc correspondant à l'intervalle $]u_1, u_2[$ on obtiendrait encore une courbe d'extrémités sur A, B et sa longueur serait

$$k - [u_2 - u_1] < k.$$

EXEMPLE. — Soit Δ le disque fermé $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ de $\mathbf{R}^2$; soit f une application continue de Δ dans $\mathbf{R}$, et soit E le graphe de f. Le sous-espace métrique E de $\mathbf{R}^3$ est homéomorphe à Δ, donc compact.

Si l'application f est lipschitzienne, par deux points quelconques p et q de E passe un arc rectifiable de E, à savoir l'image du segment de droite joignant les projections de p et q sur Δ.

Donc, d'après le théorème 11-*6*, il passe par p et q une géodésique de E.

Appelons *intérieur* de E l'image de l'intérieur de Δ et *frontière* de E l'image du cercle $x^2 + y^2 = r^2$, et désignons par O l'image du centre de Δ.

La longueur des arcs de E joignant O à un point de la frontière a une borne inférieure $\geqslant r$; d'autre part la longueur des géodésiques joignant O à q tend vers 0 lorsque q tend vers O. Il en résulte que si q est pris dans un voisinage convenable de O, toute géodésique joignant O et q est intérieure à E. On peut donc énoncer :

PROPOSITION **11**-*7*. — *Si p est un point d'une surface lipschitzienne ouverte* S *de* $\mathbf{R}^3$ *de la forme* $z = f(x, y)$, *pour tout point q de* S *assez voisin de p il existe une géodésique de* S *d'extrémités p et q.*

IV. — LE THÉORÈME DE STONE-WEIERSTRASS

Nous allons ici établir plusieurs théorèmes qui nous montreront que si une famille de fonctions numériques continues sur un espace compact est assez riche et est stable par certaines opérations, elle permet d'approximer uniformément toute fonction continue sur cet espace.

Soit X un espace compact, et $\mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathbf{R})$ l'algèbre des applications continues de X dans $\mathbf{R}$, munie de la topologie de la convergence uniforme.

Nous dirons qu'une partie A de $\mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathbf{R})$ est *réticulée* si pour tous $f, g \in \mathrm{A}$, les enveloppes $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ appartiennent aussi à A.

LEMME **12**-*1*. — *Soit* A *une partie réticulée de* $\mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathbf{R})$.

Dire qu'une fonction $f \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathbf{R})$ appartient à la fermeture $\overline{\mathrm{A}}$ *de* A *équivaut à dire que, pour tous $x, y \in \mathrm{X}$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une $g \in \mathrm{A}$, dépendant de x, y telle que*

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon, \qquad |f(y) - g(y)| < \varepsilon.$$

Pour bien marquer que cette g dépend de x et y, on la notera $g_{x,y}$.

DÉMONSTRATION. — Fixons ε. Avec la notation adoptée, on a :

$$|f(x) - g_{x,y}(x)| < \varepsilon; \quad (1) \qquad |f(y) - g_{x,y}(y)| < \varepsilon. \quad (2)$$

Posons $\omega_{x,y} = \{z : g_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon\}$.

Comme la fonction $(g_{x,y} - f)$ est continue, l'ensemble $\omega_{x,y}$ est ouvert; et il contient y d'après la relation (2) ; donc pour tout x fixe, les $\omega_{x,y}$ constituent un recouvrement ouvert de X; on peut extraire de ce recouvrement un recouvrement fini (ω_{x,y_i}).

Posons $$g_x = \inf_i (g_{x,y_i});$$

on a $$g_x < f + \varepsilon \text{ dans X}; \quad \text{et} \quad g_x(x) > f(x) - \varepsilon.$$

Posons $$\omega_x = \{z : g_x(z) > f(z) - \varepsilon\}.$$

Comme la fonction $(g_x - f)$ est continue, l'ensemble ω_x est ouvert et il contient x; donc les ω_x constituent un recouvrement ouvert de X; on peut extraire de ce recouvrement un recouvrement fini (ω_{x_j}).

Posons
$$g = \sup_j (g_{x_j});$$
on a :
$$g \in \mathrm{A}; \quad g < f + \varepsilon \quad \text{et} \quad g > (f - \varepsilon)$$

On a donc bien trouvé une $g \in \mathrm{A}$ qui approxime f à ε près.

EXEMPLE. — Soit X un intervalle $[a, b]$ de **R** et soit A l'ensemble des fonctions continues f sur X qui sont affines par morceaux (c'est-à-dire qu'il existe un recouvrement fini de X par des intervalles dans chacun desquels f est affine). Cet ensemble A est évidemment réticulé, et pour tous x, y il existe des $f \in \mathrm{A}$ qui prennent en x, y des valeurs données quelconques.

Donc
$$\overline{\mathrm{A}} = \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathbf{R}).$$

On a un résultat analogue lorsque X est un compact de **R**, et A l'ensemble des traces sur X des fonctions f continues et affines par morceaux dans $\mathbf{R}^n$ (c'est-à-dire les f de la forme : $f = \sup(g_1, g_2, \ldots, g_p) - \sup(h_1, h_2, \ldots, h_q)$, où les g_i et h_j sont affines dans $\mathbf{R}^n$).

LEMME 12-2. — *Toute sous-algèbre fermée* A *de* $\mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathbf{R})$ *est réticulée.*

DÉMONSTRATION. — En vertu des relations :
$$\sup(f, g) = \tfrac{1}{2}[(f+g) + |f-g|]; \qquad \inf(f, g) = \tfrac{1}{2}[(f+g) - |f-g|],$$
il suffit de démontrer que si $f \in \mathrm{A}$, on a aussi $|f| \in \mathrm{A}$.

On va montrer pour cela que $|f|$ est limite uniforme de polynômes en f de la forme $\sum_1^n a_p f^p$; on peut évidemment se borner au cas où $\|f\| \leqslant 1$.

Or, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :
$$0 \leqslant (x^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - |x| \leqslant \varepsilon.$$
D'autre part :
$$x^2 + \varepsilon^2 = 1 + \varepsilon^2 + (x^2 - 1) = (1 + \varepsilon^2)(1 + u) \quad \text{où} \quad u = (x^2 - 1)/(1 + \varepsilon^2)$$

Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a
$$|u| \leqslant (1 + \varepsilon^2)^{-1} < 1,$$
donc la série de Taylor (1) de $(1+u)^{\frac{1}{2}}$ converge uniformément vers $(1+u)^{\frac{1}{2}}$ lorsque $x \in [-1, 1]$; il existe donc un polynôme $\mathrm{P}(x)$ tel que
$$|(x^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \mathrm{P}(x)| \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour tout } x \in [-1, 1].$$

(1) Il existe des démonstrations du lemme 12-2 qui évitent l'usage de la formule de Taylor (voir exercice 16).

En particulier on a donc $|P(0)| \leqslant 2\varepsilon$, donc si l'on pose enfin $Q = P - P(0)$, on a :

$$\left|Q(x) - |x|\right| \leqslant \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon \quad \text{pour tout } x \in [-1, 1].$$

Puisque Q n'a pas de terme constant, on a $Q(f) \in A$; et puisqu'on a supposé $\|f\| \leqslant 1$, on a :

$$\|Q(f) - |f|\| \leqslant 4\varepsilon.$$

Définition 12-3. — SOIT A UN ENSEMBLE D'APPLICATIONS D'UN ENSEMBLE X DANS UN ENSEMBLE Y. ON DIT QUE A *SÉPARE* LES POINTS DE X SI POUR TOUS $x, y \in X$, AVEC $x \neq y$, IL EXISTE $f \in A$ TELLE QUE $f(x) \neq f(y)$.

Par exemple, si X est un espace métrique, $\mathscr{C}(X, \mathbf{R})$ sépare les points de X puisque, si $a, b \in X$ avec $a \neq b$, la fonction continue $x \longrightarrow d(a, x)$ sépare a et b.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème fondamental cherché :

THÉORÈME **12-4** (de Stone-Weierstrass). — *Soit* A *une sous-algèbre de* $\mathscr{C}(X, \mathbf{R})$ *telle que :*

1° A *sépare les points de* X;

2° Pour tout $x \in X$ *il existe* $f \in A$ *telle que* $f(x) \neq 0$.

Alors $\overline{A} = \mathscr{C}(X, \mathbf{R})$.

DÉMONSTRATION. — 1° Montrons d'abord que pour tous $x, y \in X$, avec $x \neq y$, et pour tous scalaires α, β, il existe $f \in \overline{A}$ avec $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$. Il suffit évidemment de le montrer pour A :

S'il existe $g \in A$ avec $g(x) \neq g(y)$ et $g(x)$, $g(y) \neq 0$, on posera

$$f = a_1 g + a_2 g^2.$$

L'existence de scalaires a_1, a_2 tels que $f(x) = \alpha$, $f(y) = \beta$ se traduit par la condition :

$$g(x) g^2(y) - g(y) g^2(x) = g(x) g(y) \big(g(y) - g(x)\big) \neq 0$$

qui est vérifiée par hypothèse.

Or il existe un tel g; car il existe g_1 tel que $g_1(x) \neq g_1(y)$; si $g_1(x)$ et $g_1(y) \neq 0$, on prend $g = g_1$; si par contre $g_1(x) = 0$, par exemple, il existe g_2 telle que $g_2(x) \neq 0$ et on prend $g = g_1 + \varepsilon g_2$, où ε est $\neq 0$ et assez petit pour qu'on ait encore $g(x) \neq g(y)$ et $g(y) \neq 0$.

2° A étant une algèbre, $\overline{A}$ est aussi une algèbre, car si $f, g \in \overline{A}$, avec $f = \lim f_n$, $g = \lim g_n$ avec f_n, $g_n \in A$, on a :

$$f + g = \lim (f_n + g_n)\,; \qquad \lambda f = \lim \lambda f_n\,; \qquad fg = \lim f_n g_n,$$

donc $(f+g)$, λf et fg appartiennent aussi à $\overline{A}$.

3° $\overline{A}$ étant une algèbre fermée, est réticulée d'après 12-*2* ; donc d'après le lemme 12-*1*, et la propriété (1) ci-dessus toute $f \in \mathscr{C}(X, \mathbf{R})$ appartient à $\overline{A}$, d'où $\overline{A} = \mathscr{C}(X, \mathbf{R})$.

Remarques. — 1° Il est commode dans les applications de formuler ainsi ce théorème :

Si une famille (f_i) d'éléments de $\mathscr{C}(X, \mathbf{R})$ sépare les points de X, et si les f_i ne s'annulent pas toutes en un même point de X, toute $f \in \mathscr{C}(X, \mathbf{R})$ est limite uniforme de polynômes (sans terme constant) par rapport aux f_i.

2° Si A contient les constantes, la condition 2 du théorème 12-*4* est satisfaite.

Corollaire 12-*5*. — *Soit* A *une sous-algèbre (sur le corps* **C**) *de* $\mathscr{C}(X, \mathbf{C})$ *telle que :*

1° A *sépare les points de* X;

2° Pour tout $x \in X$, *il existe* $f \in A$ *telle que* $f(x) \neq 0$;

3° Pour tout $f \in A$, *on a aussi* $\overline{f} \in A$ *(où* $\overline{f}$ *désigne la conjuguée de* f*).*

Alors
$$\overline{A} = \mathscr{C}(X, \mathbf{C}).$$

En effet la sous-algèbre A_r (sur **R**) des fonctions à valeurs réelles de A vérifie les conditions 1 et 2 du théorème 12-*4* car si f sépare x et y, il en est de même de $\mathscr{R} f$ ou de $\mathscr{R}(if)$; et si $f(x) \neq 0$, il en est de même pour $\mathscr{R} f(x)$ ou $\mathscr{R}(if)(x)$.

Donc $\quad \overline{A}_r = \mathscr{C}(X, \mathbf{R})$; $\qquad$ donc $\quad \overline{A_r + iA_r} = \mathscr{C}(X, \mathbf{C})$.

Z La condition 3 de ce corollaire est essentielle. Prenons en effet pour X le disque unité de **C**, et soit A l'ensemble des traces sur X des polynômes par rapport à la variable complexe z. L'algèbre A vérifie les conditions 1 et 2, mais pas la condition 3. On vérifie que $A \neq \mathscr{C}(X, \mathbf{C})$, par exemple en remarquant que pour toute $f \in A$, donc aussi pour toute $f \in \overline{A}$, $f(0)$ est la moyenne de f sur le cercle unité, ce qui n'est pas vrai de toute $f \in \mathscr{C}(X, \mathbf{C})$.

Applications. — 1° Soit X une partie compacte de $\mathbf{R}^n$; la famille (f_i) des n fonctions coordonnées $x \longrightarrow x_i$ sépare les points de X. Donc toute fonction $f \in \mathscr{C}(X, \mathbf{C})$ est limite uniforme de polynômes à n variables et à coefficients complexes (avec terme constant si $O \in X$; sans terme constant, si on le désire, si $O \notin X$).

2° Soit X le cercle unité $|z| = 1$ de **C**; la fonction $z \longrightarrow z$ sépare les points de X et ne s'annule pas sur X; donc l'algèbre engendrée par z et $\overline{z}$ est partout dense dans $\mathscr{C}(X, \mathbf{C})$. Désignons par φ l'application $t \longrightarrow e^{it}$ de **R** dans X. Pour tout $f \in \mathscr{C}(X, \mathbf{C})$, $f \circ \varphi$ est une fonction continue sur **R**, pério-

dique de période 2π; et on sait (voir chap. III) que toute fonction continue périodique de période 2π sur **R** est de cette forme.

Puisque f est limite uniforme de polynômes en z et $\bar{z}$, $f \circ \varphi$ est limite uniforme de polynômes en e^{it} et e^{-it} ; autrement dit toute fonction continue à valeurs complexes sur **R** et de période 2π est limite uniforme de polynômes trigonométriques $\sum_{-n}^{n} a_p e^{ipt}$.

3° Soient X, Y deux espaces métriques compacts ; désignons par $\mathscr{C}$ l'espace normé $\mathscr{C}(X \times Y, \mathbf{R})$, et par $\mathscr{C}_X$ (resp. $\mathscr{C}_Y$) la partie de $\mathscr{C}$ constituée par les fonctions f de la forme $(x, y) \longrightarrow g(x)$ (resp. $h(y)$).

$\mathscr{C}(X, \mathbf{R})$ sépare les points de X puisque, si $a, b \in X$ avec $a \neq b$, la fonction continue $x \longrightarrow d(a, x)$ sépare a et b ; de même $\mathscr{C}(Y, \mathbf{R})$ sépare les points de Y. D'autre part deux points distincts de $X \times Y$ ont, soit leurs abscisses distinctes, soit leurs ordonnées distinctes ; donc $\mathscr{C}_X \cup \mathscr{C}_Y$ sépare les points de $X \times Y$. Comme en outre cet ensemble contient la fonction 1, l'algèbre A engendrée par $\mathscr{C}_X \cup \mathscr{C}_Y$ est partout dense dans $\mathscr{C}$. Cette algèbre A n'est autre que l'ensemble des fonctions de la forme :

$$f(x, y) = \sum_{i = 1, 2, \ldots, n} g_i(x) h_i(y)$$

4° L'application (1) ci-dessus montre que l'ensemble des polynômes en x est partout dense dans $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R}$. Si l'on pose

$$x = e^{-t}, \qquad \text{où } t \in [0, \infty[,$$

on en déduit que l'ensemble des sommes $\sum_{0}^{p} a_n e^{-nt}$ est partout dense dans l'espace, muni de la métrique uniforme, des fonctions continues sur $[0, \infty[$, ayant une limite à l'infini.

On vérifiera, par soustraction de la constante a_0, que les combinaisons linéaires des e^{-kt} (où $k = 1, 2\ldots$, ou simplement $k > 0$) sont partout denses dans l'espace, muni de la métrique uniforme, des fonctions continues sur $[0, \infty[$, qui tendent vers 0 à l'infini.

Prolongement de fonctions continues — Soient X un espace topologique, Y une partie fermée de X, et f une application continue de Y dans **R**. La question se pose de savoir si l'on peut prolonger f en une application continue de X dans **R**. Nous allons voir que le théorème de Stone-Weierstrass fournit la réponse aisément lorsque X est compact et métrisable.

PROPOSITION **12-6**. — *Si* Y *désigne une partie fermée d'un espace métrique compact* X, *toute* $f \in \mathscr{C}(Y, \mathbf{R})$ *est la restriction à* Y *d'un élément de* $\mathscr{C}(X, \mathbf{R})$.

DÉMONSTRATION. — 1. $\mathscr{C}(X, \mathbf{R})$ sépare les points de X (donc aussi ceux de Y) puisque, si $a, b \in X$ avec $a \neq b$, la fonction continue $x \longrightarrow d(a, x)$ sépare a et b. Donc le théorème 12-4 appliqué à Y montre que pour

toute $g \in \mathscr{C}(Y, \mathbf{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g_\varepsilon \in \mathscr{C}(X, \mathbf{R})$ telle que $|g_\varepsilon(y) - g(y)| < \varepsilon$ pour tout $y \in Y$. Nous supposerons de plus que g et g_ε ont mêmes bornes (si g_ε n'a pas cette propriété, on la remplace par $\sup\big(\alpha, \inf(\beta, g_\varepsilon)\big)$, où α et β désignent respectivement les bornes inférieure et supérieure de g).

2. On définit par récurrence une suite $g^{(n)}$ d'éléments de $\mathscr{C}(X, \mathbf{R})$ par les conditions suivantes (utilisant les notations du (1)) :

$$g^{(1)} = f_{\frac{1}{2}}\,; \qquad g^{(n)} = \Big(f - \sum_{1}^{n-1} g^{(i)}\Big)_{(\frac{1}{2})^n} \text{ pour } n > 1\,.$$

On déduit de là que :

$$\Big|f(y) - \sum_{1}^{n} g^{(i)}(y)\Big| \leqslant (\tfrac{1}{2})^n \text{ sur } Y\,; \qquad |g^{(n)}(x)| \leqslant (\tfrac{1}{2})^{n-1} \text{ sur } X\,.$$

Il en résulte, d'une part que la série de terme général $g^{(n)}$ converge uniformément dans X, d'autre part que sa somme g est égale à f sur Y.

V. — FONCTIONS DÉFINIES SUR UN INTERVALLE DE **R**

L'existence d'une structure d'ordre et d'une structure affine sur les intervalles de **R** permet de définir pour les fonctions définies sur de tels intervalles des notions liées à ces structures, telles que celle de limite à gauche ou à droite, de monotonie, de dérivabilité, de convexité.

Nous allons examiner ici ces notions.

13. — Limites à gauche et à droite

Rappelons (chap. V, § 8) que si I est un intervalle de **R**, E un espace topologique séparé, et f une application de I dans E, on dit que f admet une limite à droite au point a de I si $\lim\limits_{\substack{x > a \\ x \to a}} f(x)$ existe.

On désigne alors cette limite par $f(a_+)$; on définirait de la même façon $f(a_-)$.

Définition 13-*1*. — ON DIT QUE a EST UNE DISCONTINUITÉ DE *PREMIÈRE ESPÈCE* DE f SI, D'UNE PART $f(a_-)$ ET $f(a_+)$ EXISTENT, ET SI D'AUTRE PART ON N'A PAS $f(a_-) = f(a) = f(a_+)$.

EXEMPLES. — 1° L'application $x \longrightarrow$ (partie entière de x) de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$ a pour discontinuités de première espèce les entiers 1, 2, ...

2° L'application f de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$ définie par :

$f(x) = 0$ pour $x = 0$ et pour x irrationnel,

$f(x) = q^{-1}$ si $x =$ (fraction irréductible pq^{-1}), a pour discontinuités de première espèce tous les points rationnels $\neq 0$.

3° L'application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = 0$ si x est rationnel, et $f(x) = 1$ si x est irrationnel, n'a aucun point de discontinuité de première espèce.

Un exemple va nous montrer que si l'on ne fait sur E aucune hypothèse restrictive, tout point de I peut être une discontinuité de première espèce :

Désignons par E l'ensemble produit $\mathbf{R} \times \{1, 2, 3\}$, muni de l'ordre lexicographique ainsi défini :

Pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a $(x, 1) < (x, 2) < (x, 3)$, et pour tous $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $x < y$, on a $(x, i) < (x, j)$, quels que soient $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Munissons alors E de la topologie de l'ordre, et désignons par f l'application $x \longrightarrow (x, 2)$ de $\mathbf{R}$ dans E.

On vérifiera que E est localement compact et que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$f(x_-) = (x, 1) \qquad \text{et} \qquad f(x_+) = (x, 3).$$

Par contre une telle singularité ne peut avoir lieu si E est métrisable :

PROPOSITION 13-2. — *Si f est une application d'un intervalle* I *de* $\mathbf{R}$ *dans un espace* E *métrique, l'ensemble des points de discontinuité de première espèce de f est au plus dénombrable.*

En effet désignons par D_n l'ensemble des points de discontinuité de f en lesquels l'oscillation de f est $\geqslant n^{-1}$.

L'ensemble D_n n'a que des points isolés, car si a désigne un point d'accumulation de D_n, a est limite d'une suite monotone de points distincts de D_n; si par exemple cette suite est décroissante, $f(a_+)$ ne peut pas exister, donc $a \notin D_n$.

L'ensemble D_n n'ayant que des points isolés est au plus dénombrable ; et comme $D = \bigcup D_n$, D est au plus dénombrable.

Z Il existe des fonctions discontinues en tout point et n'ayant aucune discontinuité de première espèce ; c'est le cas de l'exemple 3 ci-dessus.

Définition 13-3. — SOIT f UNE APPLICATION D'UN INTERVALLE I DE $\mathbf{R}$ DANS UN ESPACE MÉTRIQUE E.

1° ON DIT QUE f EST *RÉGLÉE* SI ELLE N'A QUE DES POINTS DE DISCONTINUITÉ DE PREMIÈRE ESPÈCE.

2° ON DIT QUE f EST UNE FONCTION *EN ESCALIER* S'IL EXISTE UNE PARTITION FINIE DE I EN SOUS-INTERVALLES (ÉVENTUELLEMENT RÉDUITS À UN POINT) SUR CHACUN DESQUELS f EST CONSTANTE.

La proposition 13-2 montre que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée est au plus dénombrable. Il est évident par ailleurs que

toute fonction en escalier est réglée, mais la réciproque est fausse, puisque toute fonction continue est réglée.

PROPOSITION 13-*4*. — *L'ensemble des fonctions réglées est stable par limite uniforme.*

En effet supposons f limite uniforme de fonctions f_n réglées ; pour tout $a \in \mathrm{I}$, $f_n(a_+)$ et $f_n(a_-)$ existent, donc il en est de même de $f(a_+)$ et $f(a_-)$.

Notons ici que si l'espace métrique E est un espace vectoriel normé, l'ensemble des fonctions réglées de $\mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathrm{E})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathrm{E})$.

PROPOSITION 13-*5*. — *Supposons l'intervalle* I *compact, l'espace métrique* E *étant quelconque.*

Il y a identité entre la classe des fonctions réglées et la classe des limites uniformes de fonctions en escalier.

DÉMONSTRATION. — Comme toute fonction en escalier est réglée, la proposition 13-*4* montre qu'il en est de même de toute limite uniforme de fonctions en escalier.

Inversement, soit f une fonction réglée, et soit ε un nombre > 0. Pour tout $x \in \mathrm{I}$ il existe deux intervalles non vides $]\alpha_x, x[$ et $]x, \beta_x[$ sur chacun desquels l'oscillation de f est $< \varepsilon$. Comme I est compact il existe un recouvrement fini de I par des intervalles de la forme $]\alpha_x, \beta_x[$, donc il existe une partition finie de I en intervalles I_n éventuellement réduits à un point, dans chacun desquels l'oscillation de f est $< \varepsilon$. La fonction f_ε constante dans chaque I_n et qui coïncide avec f au milieu de I_n approxime évidemment f à ε près.

COROLLAIRE. — *Toute application réglée de* I *compact dans* E *métrique est bornée.*

14. — Fonctions monotones

Si f est une application croissante d'un intervalle I dans **R**, on a pour tout $a \in \mathrm{I}$

$$f(a_-) = \sup_{x<a} f(x) ; \qquad f(a_+) = \inf_{x>a} f(x) .$$

Donc *toute fonction croissante* (et de même toute fonction décroissante) *est une fonction réglée* ; en particulier l'ensemble de ses points de discontinuité est au plus dénombrable.

Donc toute différence de deux fonctions croissantes, autrement dit toute fonction à variation bornée (chap. V, proposition 24-*8*) est réglée. Ce résultat

pourrait nous laisser espérer qu'inversement toute fonction numérique réglée est à variation bornée ; il n'en est rien puisqu'il existe même des fonctions continues sur [0, 1] à variation non bornée.

EXEMPLES. — Il est bon d'être familier avec quelques exemples classiques de fonctions croissantes d'allure paradoxale, qui servent de garde-fous dans la recherche d'énoncés mathématiques.

1° Soit $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ un ensemble dénombrable de points de l'intervalle ouvert] 0, 1 [tel que $\bar{A} = [0, 1]$, et soit (α_n) une suite infinie de nombres > 0, de somme 1.

Pour tout $x \in [0, 1]$ on pose :

$$f(x) = \sum_{a_n < x} \alpha_n$$

Autrement dit, la somme est étendue à tous les n tels que $a_n < x$. Il est immédiat que f est strictement croissante sur [0, 1], avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, et que l'ensemble de ses points de discontinuité est A.

2° On pose maintenant $f([0, 1]) = B$, où f est la fonction définie dans l'exemple précédent. L'application f^{-1} de B sur [0, 1] est strictement croissante; on vérifiera :

a) Que f^{-1} se prolonge de façon unique en une application croissante g de [0, 1] sur [0, 1] ;

b) Que g est continue ;

c) Que la somme des longueurs des intervalles de [0, 1] sur lesquels g est constante est égale à 1, ce qui entraîne que la variation de g se fait sur un ensemble de « mesure nulle » en un sens qui sera précisé dans la théorie de l'intégration.

15. — Théorèmes des accroissements finis

Nous ne rappellerons pas ici les propriétés élémentaires classiques des dérivées d'une fonction d'une variable réelle. Par contre, nous démontrerons plusieurs théorèmes d' « accroissements finis » qui permettront de remonter du local au global et remplaceront avantageusement le théorème classique des accroissements finis, qui n'est valable que pour les fonctions dérivables à valeurs réelles.

Dans tout ce qui suit, I désigne un intervalle quelconque de **R**, et D une partie finie ou dénombrable de I ; dans les énoncés plus classiques cet ensemble D était, soit vide, soit réduit aux extrémités de I.

LEMME 15-*1*. — *Soit f une application continue de* I *dans* **R** *telle que, pour tout x intérieur à* I, *avec $x \notin$* D, *et pour tout $\delta > 0$ il existe $y \in]x, x+\delta[$ tel que $f(x) \leqslant f(y)$.*

Alors f est croissante dans I.

DÉMONSTRATION. — Soient $u, v \in \mathrm{I}$, avec $u < v$, et soit k un nombre quelconque tel que

$$k < f(u)\,; \qquad k \notin f(\mathrm{D})\,.$$

Soit A l'ensemble des $x \in [u, v]$ tels que $k \leqslant f(x)$; cet ensemble n'est pas vide puisqu'il contient u, et il est fermé puisque f est continue ; donc il contient le nombre $\alpha = \sup \mathrm{A}$.

Supposons $\alpha < v$; on ne peut avoir $k < f(\alpha)$, sinon α serait intérieur à A ; donc $k = f(\alpha)$. Or $\alpha \notin \mathrm{D}$ puisque $f(\alpha) = k \notin f(\mathrm{D})$; donc d'après l'hypothèse du lemme, il existe $\beta \in]\,\alpha, v\,[$ tel que $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$; d'où $\beta \in \mathrm{A}$, ce qui est en contradiction avec $\alpha = \sup \mathrm{A}$.

On a donc $\alpha = v$, autrement dit $k \leqslant f(v)$; comme $f(\mathrm{D})$ est au plus dénombrable, il existe des k arbitrairement voisins de $f(u)$; donc $f(u) \leqslant f(v)$.

Autrement dit f est croissante.

LEMME 15-*2*. — *Soit* φ *une application continue de* I *dans un espace métrique* E, *et soit* g *une application continue croissante de* I *dans* $\mathbf{R}$.

On suppose que, pour tout x *intérieur à* I, *avec* $x \notin \mathrm{D}$, *et pour tout* $\delta > 0$, *il existe* $y \in]\,x, x+\delta\,[$ *tel que*

$$d(\varphi(y), \varphi(x)) \leqslant g(y) - g(x)\,. \tag{1}$$

Alors pour tous $u, v \in \mathrm{I}$, *avec* $u < v$, *on a :*

$$d(\varphi(v), \varphi(u)) \leqslant g(v) - g(u)\,.$$

En effet, u et v étant donnés, posons

$$f(x) = g(x) - d(\varphi(u), \varphi(x)) \qquad \text{pour tout } x \in [u, v]\,.$$

Pour tous $x, y \in [u, v]$ tels que $x < y$ et tels que (1) soit vérifiée, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= g(x) - g(y) + d(\varphi(u), \varphi(y)) - d(\varphi(u), \varphi(x)) \\ &\leqslant g(x) - g(y) + d(\varphi(y), \varphi(x)) \leqslant 0\,. \end{aligned}$$

Donc d'après le lemme 15-*1*, f est croissante sur $[u, v]$; d'où :

$$0 \leqslant f(v) - f(u)\,, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad d(\varphi(u), \varphi(v)) \leqslant g(v) - g(u)\,.$$

Pour retrouver maintenant des énoncés d'allure plus classique, nous allons donner une définition :

Définition 15-*3*. — SOIT φ UNE APPLICATION DE I DANS UN ESPACE NORMÉ[1] E. ON DIT QUE φ EST *DÉRIVABLE À DROITE* AU POINT a DE I (OÙ a N'EST PAS EXTRÉMITÉ DROITE DE I) SI L'ÉLÉMENT $h^{-1}(\varphi(a+h) - \varphi(a))$ DE E TEND VERS UNE LIMITE LORSQUE $h \to 0$ PAR VALEURS > 0. ON APPELLE CETTE LIMITE LA DÉRIVÉE À DROITE DE φ EN a, ET ON LA NOTE $\varphi'_d(a)$.

---

[1] Pour la définition d'un espace normé, voir 2-*1* et 4-*1*, chap. VII.

On peut alors écrire :

$$\Delta\varphi = \varphi(a+h) - \varphi(a) = h\left(\varphi'_d(a) + \varepsilon(h)\right), \qquad \text{où} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$h\left(\|\varphi'_d(a)\| - \varepsilon\right) \leqslant \|\Delta\varphi\| \leqslant h\left(\|\varphi'_d(a)\| + \varepsilon\right)$$

pour tout h assez petit.

En particulier φ est continue à droite au point a.

On définit de même la dérivabilité à gauche ; si φ est dérivable à gauche et à droite au point a, avec égalité des dérivées, on dit que φ est dérivable en a.

THÉORÈME 15-*4*. — *Si la fonction numérique continue φ est dérivable à droite en tout point de* $(I \dot{-} D)$, *et si $m \leqslant \varphi'_d(x) \leqslant M$ pour tout $x \in (I \dot{-} D)$, on a :*

$$m(v-u) \leqslant \varphi(v) - \varphi(u) \leqslant M(v-u) \qquad \textit{pour} \;\; u < v.$$

Les inégalités sont strictes lorsque f n'est pas affine sur $[u, v]$.

DÉMONSTRATION. — Montrons d'abord que si $\varphi'_d(x) \geqslant 0$ pour tout $x \notin D$, φ est croissante. En effet, ε étant donné, pour tout $x \notin D$ on a, dès que h est assez petit :

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) \geqslant -\varepsilon h.$$

Donc la fonction $f : x \longrightarrow \varphi(x) + \varepsilon x$ vérifie les conditions du lemme 15-*1* ; donc elle est croissante ; comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, φ est aussi croissante.

Or les fonctions $\varphi_1 : x \longrightarrow Mx - \varphi(x)$ et $\varphi_2 : x \longrightarrow \varphi(x) - mx$ ont des dérivées à droite $\geqslant 0$ aux points de $(I \dot{-} D)$, donc elles sont croissantes, d'où les inégalités larges cherchées.

Enfin, si f n'est pas affine de dérivée M sur $[u, v]$, la fonction croissante $\left(Mx - \varphi(x)\right)$ n'est pas constante sur $[u, v]$, d'où

$$Mu - \varphi(u) < Mv - \varphi(v).$$

On raisonne de même pour $\varphi(x) - mx$.

THÉORÈME 15-*5*. — *Soit φ une application continue de* I *dans un espace normé* E, *et soit g une application continue croissante de* I *dans* **R**.

On suppose que f et g sont dérivables à droite en tout point de $I \dot{-} D$, *et que*

$$\|\varphi'_d(x)\| \leqslant g'_d(x).$$

Alors pour tous $u, v \in I$ avec $u < v$, on a :

$$\|\varphi(v) - \varphi(u)\| \leqslant g(v) - g(u).$$

DÉMONSTRATION. — Donnons-nous un nombre $\varepsilon > 0$; pour tout x intérieur à I, avec $x \notin D$, il existe des $h > 0$ arbitrairement petits tels que

$$\begin{aligned}\|\varphi(x+h) - \varphi(x)\| &\leqslant h\left(\|\varphi'_d(x)\| + \varepsilon\right) \\ &\leqslant h\left(g'_d(x) + \varepsilon\right) \leqslant g(x+h) - g(x) + 2\varepsilon h.\end{aligned}$$

En vertu du lemme 15-*2* appliqué aux fonctions φ et $x \longrightarrow g(x) + 2\varepsilon x$, on a donc

$$\| \varphi(v) - \varphi(u) \| \leqslant g(v) - g(u) + 2\varepsilon(v-u).$$

Cette relation a lieu pour tout $\varepsilon > 0$, d'où la relation cherchée.

COROLLAIRE 15-*6*. — *Si* $\| \varphi'_d(x) \| \leqslant M$ *pour tout* $x \in I \dot{-} D$, φ *est lipschitzienne de rapport* M *sur* I.

COROLLAIRE **15-*7***. — *Soit f une application continue de* I *dans* E *normé; dérivable à droite en tout point de* $I \dot{-} D$, *et soit* $u \in E$.

Si pour tout $x \in I \dot{-} D$ *on a* $\|f'_d(x) - u\| \leqslant \varepsilon$, *on a pour tous* $a, b \in I$:

$$\|f(b) - f(a) - (b-a)u\| \leqslant \varepsilon(b-a).$$

Il suffit pour le voir d'appliquer 15-*6* à φ définie par $\varphi(x) = f(x) - xu$.

Z 1° Tous les énoncés que nous venons d'établir concernent des fonctions définies dans un intervalle I de **R**; nous verrons plus tard qu'on peut étendre certains de ces énoncés au cas où I est remplacé par un ensemble convexe de $\mathbf{R}^n$, en utilisant le fait que deux points quelconques d'un convexe sont extrémités d'un segment de droite contenu dans le convexe.

Mais nous allons voir par un exemple qu'il n'est pas possible de remplacer I par un espace métrique général :

Soit J la partie du plan euclidien $\mathbf{R}^2$ ainsi définie : J est la réunion des deux intervalles de droite $[(1,0), (0,k)]$ et $[(-1,0), (0,k)]$.

On définit l'application φ de J dans **R** comme restriction à J de la forme linéaire $(x_1, x_2) \longrightarrow kx_1$.

On vérifie aisément que si J est muni de la métrique euclidienne, φ est lipschitzienne de rapport 1 au voisinage de chaque point de J. Or le plus petit nombre k' tel que φ soit lipschitzienne de rapport k' est k, qui peut être arbitrairement grand.

2° La démonstration du lemme 15-*1* utilise seulement le fait que f (D) ne contient aucun intervalle; on pourrait donc espérer élargir la classe des ensembles D figurant dans les énoncés. Mais des exemples précis montrent qu'une telle extension serait mal commode et peu intéressante : c'est ainsi que la fonction continue croissante g construite en 13-*5* a une dérivée nulle donc $\leqslant 0$, sauf aux points d'un ensemble fermé de « mesure nulle », et cependant elle est croissante et non constante.

3° Tous nos énoncés font jouer aux dérivées à droite un rôle privilégié; on pourrait évidemment remplacer dans ces énoncés la droite par la gauche. D'ailleurs en général les fonctions étudiées auront une dérivée bilatérale en tout point de $(I \dot{-} D)$.

16. — Définition des fonctions convexes. Propriétés immédiates

Dans le paragraphe 8 nous avons vu l'importance de l'opération « enveloppe supérieure » pour créer de nouvelles classes de fonctions; elle va apparaître à nouveau à propos des fonctions convexes qui s'identifieront aux enveloppes supérieures de fonctions affines. Nous utiliserons ici la notion d'ensemble convexe, définie et étudiée au chapitre IV [1].

Définition 16-*1*. — SOIT f UNE FONCTION NUMÉRIQUE *FINIE*, DÉFINIE SUR UN INTERVALLE I DE **R**.

ON DIT QUE f EST *CONVEXE* SI, POUR TOUS x_1, $x_2 \in$ I, TOUT POINT $M(x)$ DU GRAPHE Γ DE f TEL QUE $x \in [x_1, x_2]$ EST AU-DESSOUS DU SEGMENT $M(x_1)$ $M(x_2)$ (EN DÉSIGNANT PAR $M(x)$ LE POINT $(x, f(x))$) ; AUTREMENT DIT :

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

POUR TOUS α_1, $\alpha_2 \geqslant 0$ TELS QUE $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Par exemple toute fonction affine $x \longrightarrow ax + b$ est convexe.

PROPOSITION **16-*2*.** — *Dire que f est convexe équivaut à dire que l'ensemble $A(f)$ des points du plan $\mathbf{R}^2$ situés au-dessus du graphe de f est convexe.*

En effet si f est convexe et si P_1, P_2 sont deux points de $A(f)$ d'abscisses x_1 et x_2, le segment $M(x_1)M(x_2)$ est au-dessus de Γ, donc aussi le segment P_1P_2 puisque P_1 et P_2 sont au-dessus de $M(x_1)$ et $M(x_2)$ respectivement.

Inversement, si $A(f)$ est convexe et si $M(x_1)$ et $M(x_2)$ sont deux points de Γ, ces points appartiennent à $A(f)$; le segment $M(x_1)M(x_2)$ appartient à $A(f)$, donc est au-dessus de Γ.

Définition 16-*3*. — ON DIT QU'UNE FONCTION NUMÉRIQUE FINIE f DÉFINIE DANS UN INTERVALLE I DE **R** EST *STRICTEMENT CONVEXE* SI POUR TOUS x_1, $x_2 \in$ I, TOUT POINT $M(x)$ DU GRAPHE Γ DE f TEL QUE $x \in]x_1, x_2[$ EST *STRICTEMENT* AU-DESSOUS DU SEGMENT $M(x_1)$ $M(x_2)$.

Ceci équivaut à dire que f est convexe et que le graphe Γ de f ne contient pas trois points alignés. Or si M_1, M_2, M_3 sont trois points alignés de Γ d'abscisses x_1, x_2, x_3 avec $x_1 < x_2 < x_3$, pour tout $x \in [x_1, x_3]$ le point $M(x)$ est sur le segment M_1M_3; sinon on aurait par exemple $x_1 < x < x_2$ avec $M(x)$ strictement au-dessous de M_1M_2, ce qui entraîne que M_2 soit strictement au-dessus de $M(x)M_3$, ce qui est impossible.

---

[1] Rappelons simplement qu'une partie X d'un espace vectoriel sur **R** est dite *convexe* si pour tous $x, y \in$ X le segment de droite $[x, y]$ est contenu dans X.

Donc dire que f est strictement convexe dans I équivaut à dire que f est convexe et qu'il n'existe aucun sous-intervalle ouvert de I sur lequel f soit affine.

Définition 16-*4*. — ON DIT QU'UNE FONCTION NUMÉRIQUE FINIE f DÉFINIE DANS UN INTERVALLE I DE $\mathbf{R}$ EST *CONCAVE* SI $(-f)$ EST CONVEXE.

Il revient au même de dire que l'ensemble des points du plan situés au-dessous du graphe de f est convexe.

Opérations sur les fonctions convexes. — PROPOSITION **16-*5*.** — a) *Toute combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe.*

b) *Toute limite simple de fonctions convexes est convexe.*

c) *Toute enveloppe supérieure finie de fonctions convexes est convexe.*

DÉMONSTRATION. — Les énoncés a et b résultent des inégalités

$$f_i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f_i(x_1) + \alpha_2 f_i(x_2)$$

qui se conservent par combinaison linéaire positive et par passage à la limite.

Pour démontrer c, soit (f_i) une famille de fonctions convexes, d'enveloppe supérieure f (supposée partout finie). Chacun des ensembles $A(f_i)$ est convexe; on sait que $A(f) = \bigcap_i A(f_i)$, donc $A(f)$ est aussi convexe. Autrement dit, f est convexe.

COROLLAIRE **16-*6*.** — *Toute fonction numérique finie sur* I *qui est enveloppe supérieure de fonctions affines est convexe.*

17. — Continuité et dérivabilité des fonctions convexes

PROPOSITION **17-*1*.** — *Dire que f est convexe équivaut à dire que la fonction p :*

$$p(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \qquad (\text{où } x \neq y)$$

est croissante par rapport à chacune des variables.

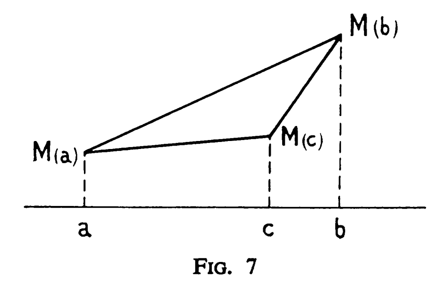


FIG. 7

En effet $p(x, y)$ est la pente de la droite $M(x)M(y)$ et la condition de l'énoncé équivaut à dire que si a, b, c sont trois points de I avec $a < c < b$, on a :

$$\text{pente } M(a)M(c) \leqslant \text{pente } M(a)M(b) \leqslant \text{pente } M(c)M(b)$$

et ceci revient à dire que $M(c)$ est au-dessous du segment $M(a)M(b)$.

COROLLAIRE 17-2. — *Dire que f est à la fois convexe et concave équivaut à dire que f est affine.*

Remarquons en effet que la concavité de f est caractérisée par la décroissance de p.

Donc si f est convexe et concave, p est une constante ; on a donc :

$$f(x) - f(y) = k(x - y).$$

Donc f est affine. La réciproque est évidente.

PROPOSITION 17-3. — *Toute fonction f convexe dans un intervalle ouvert I admet en tout point une dérivée à gauche et une dérivée à droite (donc est continue), et si $a < b$ on a :*

$$f'_g(a) \leqslant f'_d(a) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant f'_g(b) \leqslant f'_d(b).$$

DÉMONSTRATION. — En effet, soit $x < a < y$ et posons

$$p(t) = (f(t) - f(a))/(t - a).$$

La proposition 17-1 montre que $p(x) \leqslant p(y)$.

Donc la borne inférieure des $p(y)$ (où $a < y$) est finie et égale à $\lim\limits_{y \to a} p(y)$; de même la borne supérieure des $p(x)$ (où $x < a$) est finie et égale à $\lim\limits_{x \to a} p(x)$. Donc $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$ existent et l'on a :

$$p(x) \leqslant f'_g(a) \leqslant f'_d(a) \leqslant p(y).$$

En faisant $y = b$ dans cette relation, on trouve une partie des inégalités cherchées ; le reste s'obtient en permutant les rôles de a et b.

Z 1° Une fonction convexe sur un intervalle *fermé* $[a, b]$ peut ne pas être continue aux extrémités ; par exemple la fonction f qui vaut 0 à l'intérieur de $[a, b]$ et 1 aux extrémités, est convexe sur $[a, b]$ mais non continue.

2° Une fonction convexe sur un intervalle ouvert borné peut ne pas être bornée ; c'est le cas de la fonction $(1 - x^2)^{-1}$ sur l'intervalle $]-1, 1[$.

3° Une fonction continue et convexe sur un intervalle fermé $[a, b]$ peut ne pas être dérivable aux extrémités ; c'est le cas de la fonction $-(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

sur $[-1, 1]$. Toutefois il y a alors une dérivée généralisée qui vaut $-\infty$ en a et $+\infty$ en b.

COROLLAIRE 17-*4*. — *Les fonctions f'_g et f'_d sont croissantes et l'ensemble des points de* I *où f n'est pas dérivable est au plus dénombrable.*

DÉMONSTRATION. — La croissance de f'_g, par exemple, se lit sur les inégalités de la proposition 17-*3*. On y lit aussi que si $a < b$, les intervalles $]f'_g(a), f'_d(a)[$ et $]f'_g(b), f'_d(b)[$ sont disjoints ; donc il peut y avoir au plus une infinité dénombrable de ces intervalles qui soient non vides ; autrement dit l'ensemble des points x en lesquels $f'_g(x) \neq f'_d(x)$ est au plus dénombrable.

Définition 17-*5*. — SOIT f UNE FONCTION CONVEXE DE GRAPHE Γ DANS UN INTERVALLE OUVERT I. ON APPELLE *DROITE D'APPUI* EN UN POINT $M(a)$ DE Γ TOUTE DROITE Δ PASSANT PAR $M(a)$ ET SITUÉE AU-DESSOUS DE Γ.

PROPOSITION 17-*6*. — *En tout point du graphe d'une fonction convexe dans un intervalle ouvert, existe au moins une droite d'appui.*

En effet les inégalités de la proposition 17-*3* montrent que pour que Δ soit droite d'appui en $M(a)$, il faut et il suffit que sa pente p vérifie la relation :

$$f'_g(a) \leqslant p \leqslant f'_d(a).$$

En particulier, si f est dérivable en a, la seule droite d'appui en $M(a)$ est la tangente.

COROLLAIRE 17-*7*. — *Toute fonction f convexe dans un intervalle ouvert est enveloppe supérieure d'une famille de fonctions affines.*

Il suffit en effet de prendre pour fonctions affines celles dont le graphe est une droite d'appui du graphe de f.

Ce corollaire est la réciproque du corollaire 16-*6*.

18. — Critères de convexité

La proposition 17-*1* fournit déjà un critère commode de convexité ; en voici d'autres :

PROPOSITION 18-*1*. — *Soit f une fonction numérique finie dans un intervalle ouvert* I, *et soit* D *une partie au plus dénombrable de* I. *Pour que f soit convexe, il faut et il suffit que f soit continue, admette une dérivée à droite f'_d en tout point de* $I \dot{-} D$, *et que f'_d soit croissante dans* $I \dot{-} D$.

DÉMONSTRATION. — D'après le corollaire 17-*4*, nous savons déjà que la condition est nécessaire. Inversement, supposons-la satisfaite. Soient a, b, c trois points de I avec $a < b < c$; posons :

$$k_1 = \sup_{x \leqslant b} f'_d(x) \qquad \text{et} \qquad k_2 = \inf_{x \geqslant b} f'_d(x)\,.$$

Le théorème 15-*4* montre que :

$$f(b) - f(a) \leqslant k_1(b-a) \qquad \text{et} \qquad k_2(c-b) \leqslant f(c) - f(b)\,.$$

Comme $k_1 \leqslant k_2$, on a donc

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

Cette relation montre que M (c) est en dessous de M (a) M (b). Donc f est convexe.

COROLLAIRE **18**-*2*. — *Si une fonction f admet une dérivée seconde f'' en tout point de l'intervalle ouvert* I, *dire qu'elle est convexe équivaut à dire que* $f'' \geqslant 0$.

Voici maintenant un critère permettant de passer du local au global.

PROPOSITION **18**-*3*. — *Soit f une fonction numérique finie sur un intervalle ouvert* I. *Si tout point de* I *est intérieur à un intervalle sur lequel f est convexe, f est convexe dans* I.

En effet, la convexité locale entraîne que f'_d existe en tout point de I, et soit localement croissante. Tout intervalle $[u, v]$ de I peut être recouvert par un nombre fini d'intervalles ouverts sur chacun desquels f'_d est croissante ; il en résulte aussitôt que $f'_d(u) \leqslant f'_d(v)$; donc f'_d est croissante dans I. En vertu de la proposition 18-*1*, f est donc convexe.

Voici enfin un critère qui n'a plus guère qu'un intérêt historique :

PROPOSITION **18**-*4*. — *Soit f une fonction numérique finie et continue (ou même seulement semi-continue inférieurement) dans un intervalle ouvert* I.

Si pour tous a, $b \in$ I on a :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(f(a)+f(b))\,,$$

la fonction f est convexe.

DÉMONSTRATION. — Soient a, b dans I avec $a < b$; soit $y = d(x)$ l'équation de la droite M (a) M (b). Si l'on n'avait pas $f(x) \leqslant d(x)$ sur $[a, b]$, l'ensemble ω des points x de $[a, b]$ en lesquels $f(x) > d(x)$, serait non vide et ouvert, puisque $(f - d)$ est semi-continue inférieurement. Soit $]\alpha, \beta[$ une

composante connexe de ω; on a $f(x) > d(x)$ sur $]\alpha, \beta[$ et $f(x) - d(x) \leqslant 0$ pour $x = \alpha$ ou β. On a donc

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > d\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}\Big(d(\alpha)+d(\beta)\Big) \geqslant \frac{1}{2}\Big(f(\alpha)+f(\beta)\Big)$$

ou

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \frac{1}{2}\Big(f(\alpha)+f(\beta)\Big)$$

contrairement à l'hypothèse.

Z Il existe des fonctions partout discontinues dans **R** et telles que l'on ait identiquement $f(x+y) = f(x)+f(y)$; une telle fonction vérifie l'inégalité de l'énoncé 18-*4* et cependant n'est pas convexe puisque sinon elle serait continue.

19. — Fonctions convexes sur une partie d'un espace vectoriel

Le critère de convexité de la proposition 16-*2* nous suggère un procédé commode pour définir la convexité d'une fonction numérique définie sur une partie X d'un espace vectoriel E sur le corps **R**.

Définition 19-*1*. — SOIT f UNE FONCTION NUMÉRIQUE FINIE, DÉFINIE SUR UNE PARTIE X D'UN ESPACE VECTORIEL E (SUR **R**).

ON DIT QUE f EST CONVEXE SI L'ENSEMBLE $A_X(f)$ DES POINTS DE L'ESPACE VECTORIEL $E \times \mathbf{R}$ SITUÉS AU-DESSUS DU GRAPHE DE f EST CONVEXE.

PROPOSITION **19-*2*.** — *Pour qu'une fonction numérique finie f, définie sur une partie* X *d'un espace vectoriel* E *soit convexe, il faut et il suffit que* X *soit un ensemble convexe et que la restriction de f à tout segment* I *de* X *soit convexe.*

DÉMONSTRATION. — La condition est nécessaire car si f est convexe, l'ensemble $A_X(f)$ est convexe, donc X qui en est la projection sur E est aussi convexe. D'autre part, pour tout segment de droite $I \subset X$, l'ensemble $A_I(f)$ est l'intersection de $A_X(f)$ et de l'ensemble convexe $I \times \mathbf{R}$, donc $A_I(f)$ est convexe.

La condition est suffisante car soient P_1 et P_2 deux points de $A_X(f)$ et soient p_1 et p_2 leurs projections sur X. Si la restriction de f au segment $I = [p_1 p_2]$ est convexe, le segment $[P_1 P_2]$ appartient à $A_I(f)$, donc aussi à $A_X(f)$.

Plusieurs des propositions établies pour les fonctions convexes d'une variable réelle s'étendent aussitôt à ces fonctions convexes généralisées. En particulier les combinaisons linéaires à coefficients $\geqslant 0$ de fonctions convexes,

les limites de fonctions convexes, les enveloppes supérieures de fonctions convexes, sont des fonctions convexes.

Si l'on se borne à des fonctions convexes f définies sur une partie convexe ouverte X de $\mathbf{R}^n$, d'autres propriétés se généralisent. Par exemple une telle f est continue et en tout point du graphe de f existe au moins un hyperplan d'appui. Nous ne démontrerons pas ces deux dernières propriétés.

PROPOSITION 19-3. — *Si f est convexe, l'ensemble $\{x : f(x) \leqslant 0\}$ est convexe.*

Plus généralement, si f est convexe et g concave, l'ensemble des points x tels que $f(x) \leqslant g(x)$ est convexe.

En effet, si f est convexe et si $f(a) \leqslant 0$, $f(b) \leqslant 0$, on a aussi $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [a, b]$; donc l'ensemble étudié est convexe.

Le second énoncé se déduit du premier en remarquant que $(f-g)$ est convexe.

On a un énoncé analogue pour l'ensemble $\{x : f(x) < g(x)\}$.

EXEMPLES. — Dans $\mathbf{R}^n$, l'ellipsoïde solide défini par $\sum x_p^2/a_p^2 \leqslant 1$ est convexe.

De même l'ensemble des x de $\mathbf{R}^n$ tels que $\sum \alpha_i \|x - a_i\| \leqslant 1$ est convexe lorsque les α_i sont $\geqslant 0$.

PROPOSITION 19-4. — *Soit* X (*resp.* Y) *une partie convexe d'un espace vectoriel* E (*resp.* F) ; *soit f une fonction convexe sur* Y, *et soit φ une application affine de* X *dans* Y.

Alors $f \circ \varphi$ est une fonction convexe sur X.

C'est une conséquence immédiate de la relation :

$$\varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \varphi(x_1) + \alpha_2 \varphi(x_2) \qquad \text{lorsque } \alpha_1 + \alpha_2 = 1 .$$

EXEMPLE. — Si f est une fonction convexe sur Y, la fonction sur Y^2 définie par $(x, y) \longrightarrow f(x-y)$ est convexe puisque l'application $(x, y) \longrightarrow x - y$ est linéaire.

Fonctions convexes positivement homogènes. — **Définition 19-5.** — SOIT f UNE FONCTION NUMÉRIQUE DÉFINIE SUR UNE PARTIE X D'UN ESPACE VECTORIEL E (SUR $\mathbf{R}$). ON DIT QUE f EST *POSITIVEMENT HOMOGÈNE* SI X EST UN CÔNE DE SOMMET O ET SI $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ POUR TOUT $x \in$ X ET TOUT $\lambda \geqslant 0$.

PROPOSITION 19-6. — *Soit f une fonction numérique finie positivement homogène définie sur un cône convexe* X *d'un espace vectoriel* E.

1° Pour que f soit une fonction convexe, il faut et il suffit que, quels que soient x_1 et $x_2 \in$ X, on ait $f(x_1 + x_2) \leqslant f(x_1) + f(x_2)$.

2° Lorsque de plus $f \geqslant 0$ sur X, *pour que f soit convexe, il faut et il suffit que l'ensemble* B *des points x de* X *en lesquels $f(x) \leqslant 1$ soit convexe.*

DÉMONSTRATION. — 1° Si f est convexe, on a pour tous $x_1, x_2 \in X$:

$$f(x_1+x_2) = 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant 2\left[f\left(\frac{x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_2}{2}\right)\right] = f(x_1)+f(x_2)$$

Inversement si $f(u_1+u_2) \leqslant f(u_1)+f(u_2)$ pour tous $u_1, u_2 \in X$, on a pour tous $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$:

$$f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2) \leqslant f(\alpha_1 x_1)+f(\alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2).$$

Donc f est convexe.

2° Appelons B l'ensemble des x de X tels que $f(x) \leqslant 1$.

Si f est convexe, la proposition 19-*3* montre que B est convexe. Inversement, supposons $f \geqslant 0$ et B convexe :

Si $x_1, x_2 \in X$, et si $k_1 > f(x_1)$, $k_2 > f(x_2)$ on a :

$$k_1^{-1} x_1 \in B \qquad \text{et} \qquad k_2^{-1} x_2 \in B.$$

Donc comme B est convexe, le barycentre $(k_1+k_2)^{-1}(x_1+x_2)$ de ces points affectés respectivement des coefficients k_1, k_2, appartient aussi à B ; on a donc :

$$f(x_1+x_2) \leqslant k_1+k_2 \qquad \text{lorsque } k_1 > f(x_1) \text{ et } k_2 > f(x_2).$$

On en déduit, puisque chaque k_i peut être pris arbitrairement voisin de $f(x_i)$:

$$f(x_1+x_2) \leqslant f(x_1)+f(x_2).$$

Donc f est convexe.

EXEMPLE. — Pour tout scalaire $\alpha > 0$, la fonction f :

$$(x_p) \longrightarrow \left(\sum |x_p|^\alpha\right)^{1/\alpha}$$

est positivement homogène dans $\mathbf{R}^n$. Or si $\alpha \geqslant 1$, chacune des fonction $|x_p|^\alpha$ est convexe, donc f^α est convexe et l'ensemble $\{x : f(x) \leqslant 1\}$ est convexe ; donc f est aussi convexe.

Fonctions convexes deux fois différentiables. — Soit f une fonction numérique définie sur un ouvert convexe X de $\mathbf{R}^n$. On suppose que f a ses dérivées partielles secondes continues.

Pour tout $a \in X$ et tout $\alpha \in \mathbf{R}^n$, l'application $\varphi : t \longrightarrow f(a+t\alpha)$ qui est définie dans un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ contenant 0 a une dérivée seconde en 0 :

$$\varphi''(0) = \sum \alpha_i \alpha_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Or la convexité de f équivaut à celle de ses restrictions aux segments de X, c'est-à-dire encore à celle des fonctions φ. Celle-ci s'exprime aussi

(corollaire 18-2) par la relation $\varphi''(0) \geqslant 0$ pour tous a, α; on peut donc énoncer :

PROPOSITION 19-7. — *Pour qu'une fonction numérique f à dérivées partielles secondes continues, définie sur une partie ouverte convexe X de $\mathbf{R}^n$ soit convexe, il faut et il suffit que pour tout $a \in$ X, la forme quadratique*

$$\sum \alpha_i \alpha_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \qquad \textit{soit} \geqslant 0\,.$$

Z 1° Il faut bien remarquer que les relations $\partial^2 f/\partial x_i^2 \geqslant 0$ ne suffisent nullement pour la convexité de f. Par exemple la fonction $(x^2+3\,xy+2\,y^2)$ n'est convexe sur aucun ouvert convexe de $\mathbf{R}^2$.

2° Si f est définie dans un ouvert non convexe X de $\mathbf{R}^n$ et vérifie la condition de la proposition 19-7, elle est convexe sur tout ouvert convexe de X, mais ne peut pas en général se prolonger en une fonction convexe sur un ensemble convexe contenant X.

On vérifiera par exemple que si X est l'ouvert de $\mathbf{R}^2$ défini par

$$X = \{(x, y) : y < 4\,x^2\},$$

la fonction $(y-x^2)^2+x^4$ est convexe au voisinage de tout point de X, mais n'admet pas de prolongement convexe dans $\mathbf{R}^2$.

20. — Moyenne relative à une fonction monotone

L'Analyse, même élémentaire, utilise des moyennes variées telles que les moyennes arithmétique, géométrique, quadratique, harmonique. Nous allons généraliser ici ces notions élémentaires et mettre en évidence des inégalités basées sur la convexité.

Pour simplifier le langage, nous appellerons ici *mesure discrète* sur un ensemble E toute famille finie $\mu = (\alpha_i, x_i)_{i \in I}$ où $x_i \in$ E et où α_i est un nombre > 0. On dit que μ est portée par une partie X de E si X contient tous les points x_i.

La masse totale de $\mu = (\alpha_i, x_i)_{i \in I}$ est le nombre $\|\mu\| = \sum \alpha_i$. Si φ désigne une application de E dans un autre ensemble F, et si $\mu = (\alpha_i, x_i)_{i \in I}$ est portée par E, on appelle image de μ par φ la mesure $\varphi(\mu) = \big(\alpha_i, \varphi(x_i)\big)_{i \in I}$ sur F; on a évidemment $\|\varphi(\mu)\| = \|\mu\|$.

Si E est un espace vectoriel, le barycentre de μ est le point $\|\mu\|^{-1} \sum \alpha_i x_i$ de E, qu'on notera $\mathscr{M}_1(\mu)$; pour tout scalaire $k>0$, la mesure $k\mu = (k\alpha_i, x_i)_{i \in I}$ a même barycentre que μ ; en particulier, pour $k = \|\mu\|^{-1}$, la mesure $k\mu$ a pour masse totale 1, ce qui est parfois commode.

Le barycentre $\mathscr{M}_1(\mu)$ appartient à tout ensemble convexe portant μ; en particulier, si $E = \mathbf{R}$, on a toujours :

$$\inf(x_\iota) \leqslant \mathscr{M}_1(\mu) \leqslant \sup(x_\iota).$$

Définition 20-*1*. — SOIT f UNE FONCTION NUMÉRIQUE CONTINUE STRICTEMENT MONOTONE SUR UN INTERVALLE A DE $\mathbf{R}$; SOIT $\mu = (\alpha_\iota, x_\iota)_{\iota \in I}$ UNE MESURE DISCRÈTE SUR A ; ET DÉSIGNONS PAR f^{-1} LA FONCTION INVERSE DE f.

ON APPELLE *MOYENNE DE μ RELATIVEMENT À f* LE NOMBRE $f^{-1}\left(\mathscr{M}_1(f(\mu))\right)$ C'EST-À-DIRE LE NOMBRE a TEL QUE

$$(\sum_\iota \alpha_\iota) f(a) = \sum_\iota \alpha_\iota f(x_\iota).$$

ON NOTERA CE NOMBRE a PAR $\mathscr{M}_f(\mu)$.

L'existence de ce nombre a résulte de ce que $\mathscr{M}_1(f(\mu)) \in f(A)$; son unicité résulte de ce que f est bijective.

Il est évident que $\mathscr{M}_f(\mu) \in A$, et que plus précisément

$$\inf(x_\iota) \leqslant \mathscr{M}_f(\mu) \leqslant \sup(x_\iota).$$

Notons aussi pour la suite que $\mathscr{M}_f = \mathscr{M}_{\alpha f + \beta}$, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$.

EXEMPLES. — 1° Si l'on prend pour f l'application identique $x \longrightarrow x$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, on a

$$\mathscr{M}_f(\mu) = \mathscr{M}_1(\mu);$$

on appellera cette moyenne la moyenne *arithmétique* parce que, dans le cas où tous les α_i sont égaux, on a effectivement :

$$\mathscr{M}_1(\mu) = n^{-1}(\sum x_\iota),$$

où n est le nombre cardinal de I.

Plus généralement on désignera par $\mathscr{M}_r$ la moyenne relative à la fonction numérique $x \longrightarrow x^r$, définie dans $\mathbf{R}_+$ si $r > 0$, dans $\mathbf{R}_+^*$ si $r < 0$. Par exemple $\mathscr{M}_{-1}$ sera la moyenne *harmonique*, $\mathscr{M}_2$ la moyenne *quadratique*.

2° Pour des raisons qui apparaîtront mieux un peu plus loin, $\mathscr{M}_0$ désignera la moyenne relative à la fonction $x \longrightarrow \operatorname{Log} x$ définie dans $\mathbf{R}_+^*$. Lorsque tous les α_i sont égaux à 1, la relation

$$n \operatorname{Log} a = \sum \operatorname{Log} x_\iota = \operatorname{Log}(\Pi x_\iota)$$

montre que $\mathscr{M}_0(\mu) = (\Pi x_\iota)^{1/n}$, c'est-à-dire la moyenne géométrique des x_i. C'est pourquoi on appellera $\mathscr{M}_0$ la moyenne *géométrique*.

COMPARAISON DES MOYENNES. — Pour toute fonction f continue strictement monotone sur A, $\mathscr{M}_f$ est une fonction numérique sur l'ensemble des mesures discrètes sur A. Nous nous proposons de chercher sous quelles conditions $\mathscr{M}_f = \mathscr{M}_g$ ou plus généralement $\mathscr{M}_f \leqslant \mathscr{M}_g$.

LEMME 20-2. — *Soit f une fonction numérique convexe dans un intervalle* A *de* **R**. *Pour toute mesure μ sur* A, *on a :*

$$f(\mathcal{M}_1(\mu)) \leqslant \mathcal{M}_1(f(\mu)).$$

L'égalité n'est réalisée que si f est affine sur le plus petit intervalle portant μ.

DÉMONSTRATION. — Si $\mu = (\alpha_i, x_i)_{i \in I}$, soit G le barycentre de la mesure $(\alpha_i, M(x_i))_{i \in I}$, où $M(x_i)$ désigne le point du graphe Γ de f d'abscisse x_i.
Les coordonnées x, y de G sont :

$$x = \mathcal{M}_1(\mu) \qquad \text{et} \qquad y = \mathcal{M}_1(f(\mu)).$$

Comme f est convexe, l'ensemble A (f) est convexe, donc contient le barycentre G ; autrement dit G est au-dessus du graphe de f, ce qui se traduit par $f(x) \leqslant y$, qui n'est autre que l'inégalité cherchée.

Si f est affine sur l'intervalle $[\inf(x_i), \sup(x_i)]$, G est évidemment sur le graphe de f, donc $f(x) = y$. Sinon, notons $\inf(x_i)$ par x_1, et $\sup(x_i)$ par x_2 ; pour tout $x \in]x_1, x_2[$, $M(x)$ est strictement au-dessus de Γ ; c'est le cas en particulier pour le barycentre de la mesure $\nu' = (\alpha_i, M(x_i))_{i=1,2}$; posons aussi $\nu'' = (\alpha_i, M(x_i))_{i \neq 1,2}$.

Une propriété bien connue des barycentres montre que G appartient au segment joignant les barycentres de ν' et ν''; comme tous deux sont au-dessus de Γ, l'un d'eux étant strictement au-dessus, G l'est aussi; autrement dit $f(x) < y$.

EXEMPLE. — Si f est strictement convexe, on a pour toute μ qui n'est pas portée par un seul point :

$$f(\mathcal{M}_1(\mu)) < \mathcal{M}_1(f(\mu)).$$

COROLLAIRE 20-3. — *Soit f une fonction numérique continue strictement croissante dans un intervalle* A *de* **R**; *on a :*

$$(\mathcal{M}_1 \leqslant \mathcal{M}_f) \Longleftrightarrow (f \text{ est convexe}); \qquad (\mathcal{M}_f \leqslant \mathcal{M}_1) \Longleftrightarrow (f \text{ est concave}).$$

Lorsque f est décroissante on a des critères analogues en permutant les mots « convexe » et « concave ».

Dans ces divers cas (f convexe ou concave), on n'a $\mathcal{M}_1(\mu) = \mathcal{M}_f(\mu)$ que si f est affine sur un intervalle portant μ.

DÉMONSTRATION. — Supposons f croissante. Si f est convexe, le lemme 20-2 montre que :

$$f(\mathcal{M}_1(\mu)) \leqslant \mathcal{M}_1(f(\mu)), \qquad \text{d'où} \quad \mathcal{M}_1(\mu) \leqslant f^{-1}(\mathcal{M}_1(f(\mu))) = \mathcal{M}_f(\mu).$$

Inversement, si $\mathcal{M}_1 \leqslant \mathcal{M}_f$, ce qui se traduit par

$$f(\mathcal{M}_1(\mu)) \leqslant \mathcal{M}_1(f(\mu)) \qquad \text{pour toute } \mu,$$

on a en particulier, pour toute μ de la forme $(\alpha_i, x_i)_{i=1,2}$ avec $\alpha_1+\alpha_2 = 1$:

$$f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2),$$

c'est-à-dire que f est convexe.

Du lemme 20-*2* résulte, que si f est convexe, on n'a $\mathcal{M}_1(\mu) = \mathcal{M}_f(\mu)$ que si f est affine sur un intervalle portant μ.

On traite de la même façon le cas de f concave. Si f est décroissante, $-f$ est croissante, et comme $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_{-f}$, les équivalences annoncées résultent de celles qu'on vient d'établir.

THÉORÈME **20-*4***. — *Soient f, g deux fonctions continues strictement monotones dans un intervalle* A *de* **R**.

1° Dire que $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_g$ équivaut à dire que

$$g=\alpha f+\beta, \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \text{ avec } \alpha \neq 0.$$

2° Dire que $\mathcal{M}_f \leqslant \mathcal{M}_g$ équivaut à dire que, ou bien g est croissante et $g \circ f^{-1}$ convexe, ou bien g est décroissante et $g \circ f^{-1}$ concave.

Dans ces deux cas, lorsque $g \circ f^{-1}$ est strictement convexe ou concave, on n'a $\mathcal{M}_f(\mu) = \mathcal{M}_g(\mu)$ que pour les μ portées par un seul point.

DÉMONSTRATION. — 1° La relation $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_g$ signifie que pour toute mesure $(\alpha_i, x_i)_{i\in I}$ telle que $\sum \alpha_i = 1$, on a :

$$f^{-1}\left(\sum \alpha_i f(x_i)\right) = g^{-1}\left(\sum \alpha_i g(x_i)\right).$$

Si l'on pose

$$h = g \circ f^{-1} \qquad \text{et} \qquad y_i = f(x_i),$$

cette relation devient :

$$h\left(\sum \alpha_i y_i\right) = \sum \alpha_i (h \circ f)(x_i) = \sum \alpha_i h(y_i)$$

ou encore

$$\mathcal{M}_1(f(\mu)) = \mathcal{M}_h(f(\mu)).$$

Comme la mesure $f(\mu)$ peut être une mesure quelconque sur f(A), cette relation s'écrit simplement $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_h$; et le corollaire 20-*3* montre que ceci exprime que h est à la fois convexe et concave, donc affine ; autrement dit on a :

$$(g \circ f^{-1})(y) = \alpha y+\beta \qquad \text{avec} \quad \alpha \neq 0;$$

ou, en posant $f^{-1}(y) = x$:

$$g(x) = \alpha f(x)+\beta.$$

2° Etudions maintenant l'inégalité $\mathcal{M}_f \leqslant \mathcal{M}_g$, en supposant d'abord f et g croissantes. Un calcul parallèle au précédent montre que la relation $\mathcal{M}_f \leqslant \mathcal{M}_g$ équivaut à $\mathcal{M}_1 \leqslant \mathcal{M}_h$, ce qui, en vertu du corollaire 20-*3*, équivaut à dire que $h = g \circ f^{-1}$ est convexe.

Si f est croissante et g décroissante, comme $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_{-g}$, l'inégalité $\mathcal{M}_f \leqslant \mathcal{M}_g$ se traduit par la convexité de la fonction $-g \circ f^{-1}$, donc par la concavité de $g \circ f^{-1}$.

Les deux autres cas s'en déduisent en remarquant que deux fonctions $u \longrightarrow g(u)$ et $u \longrightarrow g(-u)$ sont simultanément, ou convexes, ou concaves.

Lorsque h est strictement convexe ou concave, le corollaire 20-*3* montre qu'on n'a $\mathcal{M}_1(f(\mu)) = \mathcal{M}_h(f(\mu))$ que si $f(\mu)$, donc aussi μ, est portée par un seul point ; d'où le dernier énoncé.

CRITÈRE PRATIQUE **20-5**. — *Supposons f et g munies de dérivées secondes avec f' et g' partout $\neq 0$; alors :*

$$(\mathcal{M}_f \leqslant \mathcal{M}_g) \Longleftrightarrow (f''/f' \leqslant g''/g').$$

DÉMONSTRATION. — Comme le changement de f en $-f$ ou de g en $-g$ laisse invariantes toutes les quantités intervenant dans la relation à établir, on peut ne considérer que le cas de f, g croissantes.

La relation $\mathcal{M}_f \leqslant \mathcal{M}_g$ équivaut alors à la convexité de $g \circ f^{-1}$; posons :

$$\mathrm{F}(y) = (g \circ f^{-1})(y) \qquad \text{et} \qquad y = f(x);$$

on a :

$$\frac{d\mathrm{F}}{dy} = \frac{d\mathrm{F}}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{g'(x)}{f'(x)}.$$

La convexité de F se traduit par la croissance de $d\mathrm{F}/dy$ par rapport à y, ou, puisque f est croissante par rapport à x, par la croissance de g'/f', c'est-à-dire $(g''f' - g'f'') \geqslant 0$, ou encore $f''/f' \leqslant g''/g'$.

EXEMPLE. — Posons :

$$f_r(x) = x^r \qquad \text{et} \qquad f_0(x) = \operatorname{Log} x.$$

Pour tout r on a :

$$f_r''/f_r' = (r-1)\, x^{-1} \qquad \text{sur} \quad]0, \infty[.$$

Or $(r-1)\, x^{-1}$ est fonction croissante de r ; donc *$\mathcal{M}_r$ est aussi fonction croissante de r.* Plus précisément, puisque $(r-1)\, x^{-1}$ est fonction strictement croissante de r on a, si $r < r'$ et si μ n'est pas portée par un point :

$$\mathcal{M}_r(\mu) < \mathcal{M}_{r'}(\mu).$$

Nous constatons ici que le cas de $r = 0$ ne constitue pas une exception, ce qui justifie la notation adoptée.

En particulier nous retrouvons les inégalités classiques :

M[ne] harmonique $\leqslant$ M[ne] géométrique $\leqslant$ M[ne] arithmétique $\leqslant$ M[ne] quadratique.

REMARQUE. — Le critère 20-5 est particulièrement intéressant car, dans l'ensemble des fonctions f envisagées, il montre que chacune des classes de fonctions f qui fournissent une même moyenne est caractérisée par le quotient f''/f'; ces quotients constituent un espace vectoriel de fonctions sur A, dont l'ordre naturel traduit l'ordre sur l'ensemble des moyennes.

PROPOSITION **20-6**. — **Inégalité de Hölder.** — *On se donne une suite finie de nombres* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda > 0$ *tels que* $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = 1$, *et une suite de même longueur de familles finies* $(a_i)_{i \in I}$, $(b_i)_{i \in I}$, ..., $(l_i)_{i \in I}$ *de nombres* $\geqslant 0$.

On a alors : $$\sum_i a_i^\alpha b_i^\beta \ldots l_i^\lambda \leqslant (\sum a_i)^\alpha (\sum b_i)^\beta \ldots (\sum l_i)^\lambda . \qquad (1)$$

L'égalité n'a lieu que, ou bien si l'une des familles a tous ses éléments nuls, ou bien si toutes ces familles sont proportionnelles.

DÉMONSTRATION. — Si l'une des familles a tous ses éléments nuls, la relation s'écrit $0 = 0$. Sinon on peut écrire :

$$\frac{\sum a_i^\alpha b_i^\beta \ldots l_i^\lambda}{(\sum a_i)^\alpha (\sum b_i)^\beta \ldots (\sum l_i)^\lambda} = \sum \left(\frac{a_i}{\sum a_i}\right)^\alpha \left(\frac{b_i}{\sum b_i}\right)^\beta \ldots \left(\frac{l_i}{\sum l_i}\right)^\lambda . \qquad (2)$$

Or la relation $\mathscr{M}_0 \leqslant \mathscr{M}_1$ montre que :

$$A^\alpha B^\beta \ldots L^\lambda \leqslant \alpha A + \beta B + \ldots + \lambda L,$$

avec égalité seulement si $A = B = \ldots = L$; le second membre de la relation 2 est donc majoré par

$$\sum \left(\alpha \frac{a_i}{\sum a_i} + \beta \frac{b_i}{\sum b_i} + \ldots + \lambda \frac{l_i}{\sum l_i}\right) = \alpha + \beta + \ldots + \lambda = 1 ,$$

avec égalité seulement si, pour tout i, on a :

$$\frac{a_i}{\sum a_i} = \frac{b_i}{\sum b_i} = \ldots = \frac{l_i}{\sum l_i},$$

ce qui exprime la proportionnalité des familles (a_i), (b_i), ...

Autre forme de l'inégalité de Hölder. — Soit r un nombre > 0; remplaçons dans la relation (1), a_i par $\omega_i a_i^{r/\alpha}$, b_i par $\omega_i b_i^{r/\beta}$, ..., où les ω_i sont > 0 ; on obtient :

$$\sum \omega_i (a_i b_i \ldots l_i)^r \leqslant (\sum \omega_i a_i^{r/\alpha})^\alpha (\sum \omega_i b_i^{r/\beta})^\beta \ldots$$

Cette relation s'écrit, après un changement de notation des exposants :

$$(\sum \omega_i (a_i b_i \ldots l_i)^r)^{1/r} \leqslant (\sum \omega_i a_i^{p_1})^{1/p_1} (\sum \omega_i b_i^{p_2})^{1/p_2} \ldots$$

où $$p_1, p_2, \ldots > 0$$

avec $$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots = \frac{1}{r}.$$

Plus brièvement cette relation peut s'écrire :

$$\mathcal{M}_r(a\, b\, \ldots\, l) \leqslant \mathcal{M}_{p_1}(a)\, \mathcal{M}_{p_2}(b) \ldots$$

Un cas particulier important est celui où $r = 1$ et où on n'a que deux familles.

L'inégalité de Hölder s'écrit alors :

$$\sum \omega_i a_i b_i \leqslant \left(\sum \omega_i a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum \omega_i b_i^q\right)^{1/q}, \quad \text{où} \quad 1/p + 1/q = 1 .$$

Plus particulièrement, pour $p = q = 2$, on obtient l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\left(\sum \omega_i a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum \omega_i a_i^2\right) \left(\sum \omega_i b_i^2\right).$$

Inégalité de Minkowski 20-7. — Cette inégalité exprime simplement qu'une certaine fonction positivement homogène est convexe dans $\mathbf{R}^n$:

On se donne des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$ et un nombre $p \geqslant 1$; on considère la fonction f ainsi définie dans $\mathbf{R}^n$:

$$x = (x_i) \longrightarrow \left(\sum \alpha_i \mid x_i \mid^p\right)^{1/p} .$$

La fonction f est évidemment positivement homogène et, comme dans l'exemple de la proposition 19-6, elle est convexe. On a donc l'inégalité (de Minkowski) :

$$\left(\sum \alpha_i \mid x_i + y_i \mid^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum \alpha_i \mid x_i \mid^p\right)^{1/p} + \left(\sum \alpha_i \mid y_i \mid^p\right)^{1/p} .$$

Lorsque les α_i sont > 0, avec $p > 1$, f est strictement convexe (sauf sur les rayons d'origine O), donc l'inégalité est stricte lorsque les familles (x_i) et (y_i) ne sont pas proportionnelles.

Cette inégalité s'étend immédiatement à des x_i, y_i complexes.

VI. — EXERCICES

Avertissement : Les exercices assez difficiles sont marqués d'un astérisque.

Fonctions numériques définies sur un ensemble quelconque

* 1° Soient $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ et $(y_j)_{j \in \mathrm{J}}$ deux familles finies de nombres réels $\geqslant 0$ telles que :

$$\sum_i x_i = \sum_j y_j .$$

Montrer qu'il existe une famille finie $(z_{ij})_{i, j \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}}$ de nombres réels $\geqslant 0$ telle que :

$$x_i = \sum_j z_{ij} \text{ pour tout } i \in \mathrm{I} \text{ et } y_j = \sum_i z_{ij} \text{ pour tout } j \in \mathrm{J} .$$

* 2° Etendre le résultat précédent aux familles d'éléments $\geqslant 0$ de l'espace ordonné $\mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathbf{R})$ où E est un ensemble quelconque.

Fonctions numériques définies sur un espace topologique

3° Soit f une fonction numérique définie dans $\mathbf{R}^2$, telle que pour tout x l'application $y \longrightarrow f(x, y)$ soit croissante et que, pour tout y, l'application $x \longrightarrow f(x, y)$ soit croissante. Montrer que f tend vers une limite lorsque x et $y \to +\infty$ en un sens que l'on précisera.

4° Soit f une fonction numérique définie dans $\mathbf{R}$. On appelle A l'ensemble des points a de $\mathbf{R}$ tels que :

$$\limsup_{x \to a,\, x > a} f(x) \neq \limsup_{x \to a,\, x < a} f(x) .$$

Montrer que A est au plus dénombrable.

* 5° Soit f une fonction numérique définie dans $\mathbf{R}$. Montrer que l'ensemble des points a de $\mathbf{R}$ tels que : $\lim_{x \to a,\, x \neq a} f(x)$ existe et soit différente de $f(a)$ est au plus dénombrable.

* 6° Soit f une fonction numérique définie dans $\mathbf{R}$. On dit que f a un *maximum relatif* en un point $a \in \mathbf{R}$ s'il existe un voisinage V de a tel que $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in$ V. Soit A l'ensemble de ces points a. Montrer que f (A) est au plus dénombrable.

7° Soit $(f_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ une famille également continue de fonctions numériques finies définies sur un espace métrique E.

a) Montrer que si les fonctions $\sup_{\iota \in \mathrm{I}} f_\iota$ et $\inf_{\iota \in \mathrm{I}} f_\iota$ sont finies, elles sont uniformément continues.

b) Montrer que la famille (f_J) des fonctions finies de la forme : $\sup_{\iota \in \mathrm{J}} f_\iota$ ou $\inf_{\iota \in \mathrm{J}} f_\iota$ où J est une partie quelconque de I est également continue.

Fonctions numériques semi-continues

8° Soient f, g deux applications semi-continues inférieurement d'un espace topologique E dans $\mathbf{R}$. Montrer que si $f+g$ est continue, f et g le sont aussi.

* 9° Soit f une fonction numérique finie semi-continue inférieurement sur l'intervalle $[0, 1]$.

a) Montrer que f est l'enveloppe supérieure des fonctions continues $g \leqslant f$.

b) Montrer que f est la limite d'une suite croissante de fonctions continues.

* 10° Etendre l'énoncé précédent à toute fonction f finie et semi-continue inférieurement sur un espace métrique à base dénombrable.

11° Soit f une fonction numérique semi-continue inférieurement définie sur un espace topologique E. Montrer que pour toute partie A non vide de E on a :

$$\sup_{x \in \bar{\mathrm{A}}} f(x) = \sup_{x \in \mathrm{A}} f(x) .$$

12° Pour tout nombre rationnel $r = p/q$ mis sous forme irréductible ($q > 0$) on pose : $f(r) = q$; montrer que f est semi-continue inférieurement dans $\mathbf{Q}$ et qu'en tout point $r \in \mathbf{Q}$, l'oscillation de f est $+\infty$.

*13° Soit E un espace métrique et soit K une partie compacte de $\mathbf{R} \times \mathrm{E}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on pose $q(x) =$ diamètre de l'ensemble des points de K d'abscisse x. Montrer que $q(x)$ est une fonction semi-continue supérieurement.

14° Soit f une fonction numérique définie sur un espace topologique E. Montrer que l'ensemble des points de E en lesquels l'oscillation de f est $\geqslant \lambda$ (où $\lambda > 0$) est fermé.
En déduire que l'ensemble des points de continuité de f est une intersection dénombrable d'ensembles ouverts.

*15° Soit f une fonction numérique continue définie dans le carré $\mathrm{C} = [0, 1]^2$: on dit que f est linéaire par morceaux s'il existe un recouvrement fini de C par des triangles dans chacun desquels f est affine. Soit $\mathscr{P}$ l'espace vectoriel de ces fonctions, muni de la topologie de la convergence uniforme. Soit $\alpha(f)$ l'aire élémentaire du graphe de f dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$. Montrer que $\alpha(f)$ est semi-continue inférieurement sur $\mathscr{P}$.

Théorème de Stone-Weierstrass

16° On demande de montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, qu'il existe une suite (p_n) de polynômes réels qui est croissante dans l'intervalle $[0, 1]$ et converge uniformément vers $\sqrt{t}$ dans cet intervalle. On posera pour cela :

$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + \tfrac{1}{2}\left(t - p_n^2(t)\right) \quad \text{et} \quad p_1 = 0,$$

et on montrera que la suite (p_n) ainsi définie par récurrence a les propriétés requises.

17° Soit E un espace compact et soit (f_i) où $i = 1, 2, \ldots, n$ une famille de n éléments de $\mathscr{C}(\mathrm{E}, \mathbf{R})$ qui sépare les points de E. Montrer que E est homéomorphe à une partie de $\mathbf{R}^n$.

18° Soient a_1, a_2, a_3 trois points non colinéaires de $\mathbf{R}^2$. On désigne par f_i la fonction $x \longrightarrow \|x - a_i\|$. Montrer que toute fonction numérique continue sur $\mathbf{R}^2$ est limite d'une suite de polynômes (sans termes constants) par rapport à f_1, f_2, f_3 ou par rapport au carré de ces fonctions, qui converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}^2$.

Fonctions définies sur un intervalle

19° Soit f une fonction numérique finie et continue dans un intervalle $\mathrm{I} = [a, b]$ de $\mathbf{R}$.

On dit que f est *croissante à droite* en un point $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ s'il existe un nombre $x_1 > x_0$ tel que $f(x_0) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in [x_0, x_1]$. On définit de même la décroissance à droite.
Montrer que si $f(a) = f(b) = 0$, il existe un point c_1 de $\overset{\circ}{I}$ en lequel f est croissante à droite, et un point c_2 de $\overset{\circ}{I}$ en lequel f est décroissante à droite (idem pour la gauche).

20° Soit f une fonction numérique continue et dérivable sur un intervalle $[a, b]$. Montrer, en utilisant le théorème classique de Rolle, que, même si f' n'est pas continue, f' prend toutes les valeurs comprises entre f'_a et f'_b (montrer que pour tout λ tel que : $f'_a < \lambda < f'_b$ il existe un $x \in [a, b]$ tel que l'une des cordes $M(a)\,M(x)$ ou $M(x)\,M(b)$ ait pour pente λ). En déduire que $f'([a, b])$ est connexe.

21° Soit f une fonction numérique continue et dérivable sur un intervalle *ouvert* $]a, b[$. Si $\alpha = \lim\limits_{x \to a} f'(x)$ existe et est finie, montrer que $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x)\big)$ existe et que f possède un prolongement continu à $[a, b[$ qui est dérivable en a, avec une dérivée égale à α.

22° Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle $I = [a, b]$, et soit A l'ensemble des x intérieurs à I tels qu'il existe un $y > x$ pour lequel $f(y) > f(x)$. Montrer que A est ouvert et que pour chacun des intervalles disjoints $]\alpha, \beta[$ qui composent A, on a $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$, avec égalité si $\alpha \neq a$.

23° Soit g une fonction numérique croissante et continue sur $I = [a, b]$, et soit k un nombre > 0.
Soit A l'ensemble des x intérieurs à I tels qu'il existe un $y > x$ pour lequel $g(y) - g(x) > k(y - x)$. Montrer, en utilisant l'exercice précédent, que B est réunion dénombrable d'intervalles ouverts dont la somme des longueurs est $\leqslant \big(g(b) - g(a)\big)/k$.

24° Soit f une application réglée d'un intervalle $[a, b]$ dans un espace métrique complet E. Montrer que $f([a, b])$ est relativement compact dans E.

*25° (Cet exercice exige la connaissance du chapitre V.) Soit f une application continue d'un intervalle I de **R** dans un espace vectoriel topologique E (sur **R**) ; et soit X une partie convexe de E définie comme intersection d'une famille de demi-espaces ouverts $\{x : l_i(x) > \alpha_i\}$, où les l_i sont des formes linéaires continues sur E, et les α_i des scalaires.
On suppose qu'il existe une partie dénombrable D de I telle que en tout point x de $(I \dot{-} D)$, f admette une dérivée à droite $f_d'(x) \in X$.
a) Montrer en utilisant 15-4 que pour tous $a, b \in I$, $f(b) - f(a) \in (b - a)\,X$.
b) En utilisant l'exercice 16, chapitre VI, retrouver l'énoncé 15-6.

Fonctions convexes

26° Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions convexes sur un intervalle ouvert I de **R**. Montrer que si la famille (f_i) est uniformément majorée et s'il existe

un $c \in \mathrm{I}$ tel que la famille $\big(f_i(c)\big)$ soit minorée, la famille (f_i) est également continue sur tout intervalle compact de I.

27° Soit f_n une suite de fonctions convexes sur un intervalle ouvert I de **R**, qui converge simplement vers une fonction finie f. Montrer en utilisant l'exercice précédent, que la convergence est uniforme sur tout intervalle compact de I.

*28° Etendre les exercices précédents à des fonctions convexes sur une partie convexe X de $\mathbf{R}^2$ (ou plus généralement de $\mathbf{R}^n$).

29° Soient f, g deux fonctions convexes sur un ensemble convexe X d'un espace vectoriel ; montrer que si $(f+g)$ est affine sur X, f et g le sont aussi.

30° Soit f une fonction convexe sur un intervalle compact $[a, b]$ et telle que $f'_d(a)$ et $f'_g(b)$ soient finies. Montrer que f est la restriction à $[a, b]$ d'une fonction convexe sur **R**.

31° Soit g une fonction numérique continue du couple (x, t) où $a \leqslant x \leqslant b$ et $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Si g est pour tout t une fonction convexe de x, démontrer la convexité de la fonction :

$$f(x) = \int_\alpha^\beta g(x, t)\, dt\,.$$

32° Soit f une fonction convexe sur **R** et soit φ une fonction continue et $\geqslant 0$ sur **R**, nulle en dehors d'un compact.

a) Montrer que la fonction $\mathrm{F}(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-t)\, \varphi(t)\, dt$ est convexe sur **R**.

b) Soit ψ la fonction définie par :

$$\psi(t) = 0 \ \text{ pour } |t| \geqslant 1\,; \qquad \psi(t) = k\, e^{(t^2-1)^{-1}} \ \text{ pour } |t| < 1\,.$$

où k est tel que l'intégrale de ψ sur **R** soit égale à 1.

Montrer que ψ possède des dérivées de tous ordres sur **R**.

c) Montrer que la fonction convexe :

$$f_a(x) = a \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, \psi(at) dt = a \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \psi\big(a(x-t)\big)\, dt$$

est indéfiniment dérivable et que f_a converge uniformément vers f sur tout intervalle compact de **R** lorsque $a \to +\infty$.

33° Soit f une fonction convexe croissante dans $]0, +\infty[$. Montrer que, ou bien $f =$ constante, ou bien $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

34° Soit f une fonction convexe dans un intervalle $[a, +\infty[$. Montrer que $f(x)/x$ tend vers une limite finie ou vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$. Montrer que, lorsque cette limite est $\leqslant 0$, la fonction f est décroissante sur $[a, +\infty[$.

*35° Soit f une fonction convexe dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

a) Montrer que la fonction φ définie par :

$\varphi(x) = f(x) - x f'_d(x)$ (ordonnée à l'origine de la tangente à droite) est décroissante.

b) Montrer que si $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x)$ est un nombre fini β il en est de même de $\alpha = \lim_{x \to +\infty} f(x)/x$ et que : $f(x) - (\alpha x + \beta)$ est $\geqslant 0$ et tend vers 0 quand $x \to +\infty$.

36° Etendre la proposition 18-*4* aux fonctions f semi-continues telles que, pour tous a et $b \in \mathrm{I}$ il existe un $x \in]a, b[$ pour lequel $\mathrm{M}(x)$ soit au-dessous du segment $\mathrm{M}(a)\,\mathrm{M}(b)$.

37° Soit f une fonction strictement croissante (resp. décroissante) sur un intervalle ouvert I de **R**. Montrer que, pour que f soit convexe, il faut et il suffit que sa fonction réciproque f^{-1} soit concave (resp. convexe).

38° Soit f une fonction numérique finie et continue sur un intervalle I de **R**. Montrer que si pour tout $a \in \mathrm{I}$, il existe un intervalle de droite ouvert contenant $\mathrm{M}(a)$ et situé en dessous du graphe de f, la fonction f est convexe.

39° En utilisant les propriétés de la transformation projective $(x, y) \longrightarrow (x^{-1}, yx^{-1})$ du demi-plan $x > 0$ sur lui-même, montrer que si f est convexe pour $x > 0$ il en est de même de la fonction $x \longrightarrow xf(x^{-1})$, et réciproquement.
Puis donner une autre démonstration en utilisant l'exercice 32.

40° *a*) En utilisant l'exercice 32, montrer que si f et g sont positives, convexes et croissantes (ou décroissantes) sur un même intervalle I, le produit fg est convexe.

b) Par la même méthode, énoncer un critère pour que $f \circ g$ soit convexe.

41° Soit f une fonction positive dans un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbf{R}$. On dira que f est *logarithmiquement convexe* si $\log f$ est convexe dans I.
Montrer que si f est logarithmiquement convexe, f est convexe.
Montrer que si f et g sont logarithmiquement convexes, fg l'est aussi.
On utilisera pour cela l'exercice 32, de même d'ailleurs que dans les exercices suivants.

*42° Montrer que la somme de deux fonctions logarithmiquement convexes l'est aussi. Il pourra être commode pour cela de noter que pour une f continue, on obtient un critère de convexité logarithmique en écrivant que

$$f^2\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant f(a)\,f(b)$$

pour tous a, b.

43° Soit $f(x, t)$ une fonction numérique finie et > 0, définie et continue dans le produit $I \times J$ de deux intervalles ouverts I et J de $\mathbf{R}$ et telle que, pour tout $t \in J$, $f(x, t)$ soit logarithmiquement convexe par rapport à x.
Montrer que si, pour tout $x \in I$ l'intégrale

$$g(x) = \int_J f(x, t)\, dt$$

est convergente, g est logarithmiquement convexe. On utilisera l'exercice 42.

44° Posons

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt .$$

Montrer en utilisant l'exercice 43 que, pour tout $x > 0$ cette intégrale est finie et que la fonction Γ est logarithmiquement convexe sur $]0, \infty[$.
Montrer que pour tout entier n on a : $\Gamma(n+1) = n!$

45° Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des fonctions concaves et positives dans un intervalle ouvert $]a, b[$.

a) Montrer que $\mathcal{K}$ est ordonné par la relation :

$$f \prec g \quad \text{si} \quad (g-f) \in \mathcal{K} .$$

b) On dira qu'un élément f de $\mathcal{K}$ est *extrémal* si toute relation : $g \prec f$ où $g \in \mathcal{K}$ entraîne que : $g = \lambda f$ avec $\lambda \in [0, 1]$.
Montrer que les seuls éléments extrémaux de $\mathcal{K}$ sont les traces des fonctions f nulles en a et b et affines sur deux intervalles $[a, c]$, $[c, b]$ (où $c \in]a, b[$), ou des fonctions qui sont affines sur $]a, b[$ et s'annulent en a ou b.

c) Montrer en utilisant l'exercice 32 que $\mathcal{K}$ muni de l'ordre $\prec$ est réticulé.

*46° Montrer que pour tout ouvert simplement *connexe* $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, distinct de $\mathbf{R}^2$, il existe une fonction numérique continue f définie dans Ω, localement *convexe* dans Ω, et qui n'est prolongeable dans aucun ouvert Ω' contenant strictement Ω en une fonction du même type.

Moyennes et inégalités

47° Montrer que l'aire d'un triangle de périmètre $2p$ est maximum lorsque ses côtés a, b, c sont égaux (utiliser la relation $\mathcal{M}_0 < \mathcal{M}_1$ et l'expression de l'aire en fonction de p, $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$).

48° Montrer que le volume d'un pavé droit d'aire donnée est maximum quand c'est un cube.

49° Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres > 0 ; et soit a leur moyenne géométrique. Montrer que

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant (1+a)^n ,$$

l'égalité n'ayant lieu que si tous les a_i sont égaux.

50° Soit μ une mesure discrète sur $]0, \infty[$. Montrer que la fonction $r \longrightarrow (\mathcal{M}_r(\mu))^r$ est logarithmiquement convexe.

51° Soit φ une fonction numérique continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$, et soit $a \in$ I.

a) Montrer qu'il existe une fonction strictement croissante (et une seule) Φ sur $]0, \infty[$ telle que :

$$\Phi'' = \varphi\Phi' ; \qquad \Phi(a) = 0 ; \qquad \Phi'(a) = 1 .$$

b) Si μ désigne une mesure discrète quelconque sur I, on pose :

$$\mathrm{I}(\varphi) = \Phi\left(\mathcal{M}_\Phi(\mu)\right) .$$

Montrer que la fonction I est logarithmiquement convexe dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}(\mathrm{I}, \mathbf{R})$.

52° Pour toute $f \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$ et pour tout $p > 0$, on pose :

$$\mathrm{N}_p(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} .$$

a) Montrer que si $p > 1$, N_p est une fonction convexe sur $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$.
On suppose maintenant f donnée et > 0.

b) Montrer que la fonction $p \longrightarrow \mathrm{N}_p(f)$ est croissante et indéfiniment dérivable.

c) Montrer que $\left(\mathrm{N}_p(f)\right)^p$ est une fonction logarithmiquement convexe de p.

d) Montrer que $\mathrm{N}_p(f)$ est une fonction logarithmiquement convexe de p^{-1} (utiliser l'exercice 39).

53° Avec les notations de l'exercice 52, montrer que si $p^{-1} + q^{-1} = 1$, on a l'inégalité :

$$\mathrm{N}_1(fg) \leqslant \mathrm{N}_p(f)\, \mathrm{N}_q(g) .$$

54° On désigne par φ, ψ, ... des fonctions continues strictement croissantes sur $[0, \infty[$, et pour toute $f \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$ avec $f \geqslant 0$, on définit $\mathcal{M}_\varphi(f)$ par la relation :

$$\varphi\left(\mathcal{M}_\varphi(f)\right) = \int_0^1 \varphi\left(f(x)\right) dx .$$

Montrer que $(\mathcal{M}_\varphi \leqslant \mathcal{M}_\psi)$ équivaut à la convexité de $\psi \circ \varphi^{-1}$.

55° Soit φ une fonction continue strictement croissante sur un intervalle $[0, a]$, avec $\varphi(0) = 0$; et soit ψ la fonction inverse de φ.
Montrer que pour tous x, y tels que $x \in [0, a]$, $y \in [0, \varphi(a)]$, on a :

$$xy \leqslant \int_0^x \varphi(t)\, dt + \int_0^y \psi(t)\, dt ,$$

l'égalité n'ayant lieu que si $y = \varphi(x)$.

56° Avec les mêmes notations, on désigne par Φ et Ψ les primitives respectives de φ et ψ qui s'annulent en 0.

Soient alors f, g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, a]$ et $[0, \varphi(a)]$ respectivement. Montrer que l'on a :

$$\int_0^1 f(u)\, g(u)\, du \leqslant \int_0^1 \Phi\big(f(u)\big)\, du + \int_0^1 \Psi\big(g(u)\big)\, du.$$

VII. — INDEX TERMINOLOGIQUE DU CHAPITRE VI [1]

VIII. — BIBLIOGRAPHIE

BOURBAKI, N., *Fonctions d'une variable réelle*, ch. I, II, III, fasc. n° 1074, Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, Paris.

HARDY, LITTLEWOOD, POLYA, *Inequalities*, Cambridge, University Press, 1952.

IX. — DÉFINITIONS ET AXIOMES

ENVELOPPE SUPÉRIEURE. — On appelle *enveloppe supérieure* d'une famille $(f_\iota)_{\iota \in I}$ de fonctions numériques sur un ensemble E la fonction :

$$f = \sup_{\iota \in I} f_\iota$$

[1] Les chiffres de ce tableau renvoient aux paragraphes et à leurs subdivisions, ou à un exercice.

définie par : $f(x) = \sup_{\iota \in I} f_\iota(x)$ pour tout $x \in E$.

Limite supérieure. — Soit f une fonction numérique sur un ensemble E, et soit $\mathscr{B}$ une base de filtre sur E.

On appelle *limite supérieure* de f suivant $\mathscr{B}$ la borne supérieure de $\overline{f}(\mathscr{B})$ (où $\overline{f}(\mathscr{B}) = \bigcap_{B \in \mathscr{B}} \overline{f(B)}$) ; on la note $\limsup_{\mathscr{B}} f$.

Semi-continuité inférieure. — Une fonction numérique f définie sur un espace topologique E est dite *semi-continue inférieurement* au point a si pour tout $\lambda < f(a)$ il existe un voisinage V de a tel que $\lambda < f(V)$.

Fonction convexe d'une variable. — Soit f une fonction numérique finie, définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. On dit que f est *convexe* si, pour tous $x_1, x_2 \in I$, tout point $M(x)$ du graphe de f tel que $x \in [x_1, x_2]$ est au-dessous du segment $M(x_1)M(x_2)$.

Fonction convexe sur une partie d'un espace vectoriel. — Soit f une fonction numérique finie, définie sur une partie d'un espace vectoriel E (sur $\mathbf{R}$).

On dit que f est *convexe* si l'ensemble des points de l'espace vectoriel $E \times \mathbf{R}$ situés au-dessus du graphe de f est convexe.

Fonction positivement homogène. — Soit f une fonction numérique définie sur une partie X d'un espace vectoriel E (sur $\mathbf{R}$). On dit que f est *positivement homogène* si X est un cône de sommet 0 et si :

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \text{pour tout } x \in X \text{ et tout } \lambda > 0.$$

Moyenne relative à une fonction monotone. — Soit f une fonction numérique continue strictement monotone sur un intervalle A de $\mathbf{R}$; soit $\mu = (\alpha_i, x_i)_{i \in I}$ une mesure discrète positive sur A.

On appelle *moyenne de* μ *relativement à* f le nombre a tel que

$$\Big(\sum_\iota \alpha_\iota\Big) f(a) = \sum_\iota \alpha_i f(x_\iota).$$

On notera ce nombre a par $\mathscr{M}_f(\mu)$.

CHAPITRE III

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

Nous avons souligné dans le chapitre V, § 22, l'intérêt de mettre des topologies sur des espaces de fonctions, et nous avons donné plusieurs exemples de telles topologies.

Nous allons maintenant étudier systématiquement les plus utiles de ces espaces, à savoir ceux qui sont munis d'une structure d'espace vectoriel sur **R** ou **C**. Les contributions les plus importantes dans ce domaine ont été faites par Banach.

I. — ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES GÉNÉRAUX EXEMPLES

1. — Définition et propriétés élémentaires des espaces vectoriels topologiques

Dans le chapitre V, § 14, nous avons défini les notions de groupe, anneau, et corps topologiques par une condition de compatibilité entre topologie et structure algébrique. Un espace vectoriel sur **R** ou **C** est muni, non seulement d'une addition, mais aussi d'une multiplication par les éléments de **R** ou **C**; on est donc conduit, si l'on veut définir sur un tel espace une topologie utile, à faire intervenir aussi la topologie du corps de base.

Pour simplifier les énoncés, nous désignerons par **K** le corps de base, toutes les fois que n'interviendront pas des propriétés particulières à **R** ou à **C**.

Définition 1-*1*. — Soit E un ensemble muni à la fois d'une structure d'espace vectoriel sur le corps **K** et d'une topologie; on dit que ces deux structures sont *compatibles* si :

1° La topologie de E est compatible avec la structure de groupe additif de E.

2° L'application $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ de l'espace topologique $\mathbf{K} \times E$ dans E est continue.

L'ENSEMBLE E MUNI DE CES DEUX STRUCTURES COMPATIBLES S'APPELLE ALORS UN *ESPACE VECTORIEL TOPOLOGIQUE* (EN ABRÉGÉ e.v.t.), *RÉEL* OU *COMPLEXE* SUIVANT QUE **K** EST **R** OU **C**.

Notons dès maintenant que si E est un e.v.t. sur **C**, le fait que **R** soit un sous-corps de **C** entraîne que la topologie de E est aussi compatible avec sa structure d'e.v.t. sur **R**. Cette remarque nous permettra, quand cela sera utile, d'utiliser quel que soit **K** les propriétés de E considéré comme espace vectoriel sur **R**, par exemple les propriétés de ses ensembles convexes.

EXEMPLES. — 1° Indiquons sans démonstration, parce que ce sera une conséquence de résultats ultérieurs, que le produit $\mathbf{K}^n$ et l'espace $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{K})$ muni de la topologie de la convergence uniforme, sont des espaces vectoriels topologiques.

2° Par contre l'espace vectoriel $\mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ des fonctions numériques continues sur **R**, muni de la topologie de la convergence uniforme (associée à l'écart $d(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$) n'est pas un espace vectoriel topologique. En effet, sa topologie est bien compatible avec sa structure de groupe, mais λf n'est pas fonction continue du couple (λ, f) puisque, par exemple, si f est une fonction non bornée, λf ne converge pas uniformément vers la fonction O lorsque $\lambda \to 0$.

PROPOSITION 1-*2*. — *La compatibilité d'une topologie et d'une structure d'espace vectoriel sur un ensemble* E *peut s'exprimer par les conditions suivantes :*

1° L'application $(x, y) \longrightarrow (x+y)$ *de* $E \times E$ *dans* E *est continue.*

2° Pour tout $a \in E$, *l'application* $\lambda \longrightarrow \lambda a$ *de* **K** *dans* E *est continue au point* $\lambda = 0$.

3° Pour tout $\alpha \in \mathbf{K}$, *l'application* $x \longrightarrow \alpha x$ *de* E *dans* E *est continue au point* $x = O$.

4° L'application $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ *de* $\mathbf{K} \times E$ *dans* E *est continue au point* $(0, O)$.

DÉMONSTRATION. — D'après la définition 1-*1*, si les structures sont compatibles, les conditions 1, 2, 3, 4 sont évidemment satisfaites.

Inversement, supposons ces conditions satisfaites; la relation :

$$\lambda x = \alpha a + (\lambda - \alpha) a + \alpha (x - a) + (\lambda - \alpha)(x - a)$$

montre que lorsque $\lambda \to \alpha$ et $x \to a$ (ce qui entraîne $(\lambda - \alpha) \to 0$ et $(x - a) \to O$), on a :

$$\lambda x \to \alpha a + 0a + \alpha O + 0O = \alpha a .$$

Donc l'application $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ est continue.

En particulier l'application $x \longrightarrow (-1)x = -x$ est continue; et comme

par hypothèse l'addition est continue, la topologie de E est bien compatible avec la structure de groupe additif de E.

PROPOSITION 1-*3*. — *Soit* E *un espace vectoriel topologique. Pour tout scalaire* $\alpha \neq 0$, *et tout* $b \in E$, *la dilatation* $x \longrightarrow \alpha x + b$ *est une homéomorphie de* E *sur lui-même.*

DÉMONSTRATION. — Toute dilatation est bijective et l'application réciproque d'une dilatation est elle-même une dilatation; or il résulte de la définition 1-*1* que toute dilatation est continue; c'est donc une bijection bicontinue de E sur E.

COROLLAIRE 1-*4*. — *1° Toute dilatation de* E *transforme tout ouvert (resp. fermé) de* E *en un ouvert (resp. fermé) de* E.

2° L'ensemble $\mathcal{V}_a$ *des voisinages d'un point* a *de* E *est l'image, par la translation* $x \longrightarrow x + a$, *de l'ensemble* $\mathcal{V}$ *des voisinages du point* O.

C'est une conséquence directe du fait que toute dilatation, donc en particulier toute translation, est une homéomorphie de E.

Rappelons que la seconde propriété est vraie dans tout groupe topologique; elle montre que la topologie de E est connue dès qu'on connaît l'ensemble des voisinages du point O.

PROPOSITION 1-*5*. — *Soit* P *une partie d'un espace vectoriel topologique* E.

Si P *est un sous-espace vectoriel de* E *(resp. un ensemble convexe, un cône), il en est de même de son adhérence* $\overline{P}$ *dans* E.

DÉMONSTRATION. — Rappelons d'abord que si f est une application continue d'un espace topologique A dans un autre B, pour tout $X \subset A$ on a $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$ (voir 7-*5*, chap. V).

Soit alors P un sous-espace vectoriel de E; soient $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ et soit f l'application $(x, y) \longrightarrow \lambda x + \mu y$ de $E \times E$ dans E; elle applique $P \times P$ dans P, donc comme elle est continue elle applique $\overline{P} \times \overline{P} = \overline{P \times P}$ dans $\overline{P}$; autrement dit, pour tous $x, y \in \overline{P}$, on a aussi $\lambda x + \mu y \in \overline{P}$, c'est-à-dire que $\overline{P}$ est un sous-espace vectoriel de E.

L'énoncé analogue concernant les convexes de E s'obtient en considérant celles de ces applications f pour lesquelles $\lambda, \mu \geqslant 0$ et $\lambda + \mu = 1$.

L'énoncé concernant les cônes de sommet O s'obtient en utilisant les applications f de E dans E de la forme $x \longrightarrow \lambda x$, où $\lambda > 0$.

COROLLAIRE 1-*6*. — *Dans un espace vectoriel topologique, tout hyperplan*[1] H *est, ou bien fermé, ou bien partout dense.*

---

[1] Rappelons qu'un hyperplan d'un espace vectoriel E est l'ensemble des zéros d'une forme linéaire sur E.

En effet d'après la proposition 1-5, et compte tenu de ce que tout sous-espace vectoriel de E contenant H est E ou H, on a, ou bien $\overline{H} = H$, ou bien $\overline{H} = E$.

Applications linéaires continues. — PROPOSITION 1-7. — *Soient* E, F *deux espaces vectoriels topologiques sur le même corps* **K**.

1° Pour qu'une application linéaire de E *dans* F *soit continue, il suffit qu'elle soit continue au point* O *de* E.

2° L'ensemble $\mathscr{L}(E, F)$ *des applications linéaires continues de* E *dans* F *est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel* $\mathscr{F}(E, F)$ *des applications de* E *dans* F.

DÉMONSTRATION. — Le premier énoncé est un cas particulier d'une caractérisation des représentations continues dans les groupes topologiques (voir chapitre V, § 14).

Pour démontrer le second, soient $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$, et soient $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$; l'application linéaire $x \longrightarrow \lambda f(x)+\mu g(x)$ de E dans F est continue puisque f et g sont continues et que l'application $(u, v) \longrightarrow \lambda u+\mu v$ de $F \times F$ dans F est continue; autrement dit on a bien $\lambda f+\mu g \in \mathscr{L}(E, F)$.

On note en général par $\mathscr{L}(E)$ l'espace $\mathscr{L}(E, E)$ des applications linéaires continues de E dans E, et on appelle ses éléments des *opérateurs* continus de E.

***Formes linéaires continues* 1-8.** — Les applications linéaires continues les plus importantes sont celles à valeurs dans **K**, autrement dit les formes linéaires continues. On note l'espace $\mathscr{L}(E, \mathbf{K})$ par E' et on l'appelle le *dual topologique* de E.

On a évidemment $E' \subset E^*$, où E^* désigne le dual algébrique de E, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires sur E.

On a en général $E' \neq E^*$, c'est-à-dire qu'il existe en général sur E des formes linéaires non continues (voir exercice 69).

Pour toute forme linéaire f, l'hyperplan $f^{-1}(0)$ est l'image réciproque par f de l'ensemble fermé $\{0\}$ de **K**; donc si f est continue, cet hyperplan est fermé dans E; on peut démontrer qu'inversement si $f^{-1}(0)$ est fermé, f est continue (voir exercice 8). Voici une autre caractérisation commode :

PROPOSITION 1-9. — *Dire qu'une forme linéaire f sur* E *est continue équivaut à dire qu'il existe un ouvert non vide de* E *sur lequel elle est bornée.*

DÉMONSTRATION. — Si f est continue, la continuité de f en O entraîne l'existence d'un voisinage de O, donc aussi d'un ouvert non vide, pour tout point x duquel $|f(x)| \leqslant 1$.

Inversement soit X un ouvert non vide de E sur lequel $|f(x)| \leqslant k$, et

soit a un point de X; le translaté $(X-a)$ de X contient O, donc est un voisinage de O, et pour tout $x \in (X-a)$ on a :

$$f(x) \in f(X-a) = f(X) - f(a), \quad \text{d'où } |f(x)| \leqslant k + |f(a)|.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe donc un voisinage V de O sur lequel $|f(x)| \leqslant \varepsilon$, à savoir l'homothétique de $(X-a)$ dans le rapport $\varepsilon(k+|f(a)|)^{-1}$. Autrement dit f est continue au point O, donc aussi partout d'après la proposition 1-*7*.

***Sous-ensemble total* 1-*10*.** — Rappelons que si X est une partie d'un espace vectoriel E, le plus petit sous-espace de E contenant X est l'ensemble F des combinaisons linéaires d'éléments de X; on l'appelle sous-espace engendré par X.

Si maintenant E est un e.v.t., la proposition 1-*5* montre que l'adhérence $\overline{F}$ de F est aussi un sous-espace vectoriel de E; on appelle $\overline{F}$ le *sous-espace fermé de* E *engendré par* X.

Lorsque $\overline{F} = E$, c'est-à-dire lorsque F est partout dense dans E, on dit que X est *total* dans E. Autrement dit X est total dans E si pour tout $x \in E$ il existe dans tout voisinage de x des points de E qui sont combinaison linéaire d'éléments de X.

Par exemple toute base de E est un sous-ensemble total de E; mais il est essentiel de noter qu'un ensemble X peut être total dans E sans pour cela engendrer E. Par exemple, dans $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$ l'ensemble X des monômes t^n engendre l'espace vectoriel F des polynômes, qui est distinct de $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$ mais partout dense dans cet espace en vertu du théorème de Stone-Weierstrass. Nous rencontrerons d'autres exemples d'ensemble total, en particulier dans l'étude des espaces de Hilbert.

2. — *Topologie associée à une famille de semi-normes*

Les topologies sur des espaces fonctionnels étudiées au chapitre V, § 22, ont été définies par des distances ou plus généralement par des écarts. Lorsqu'il s'agit d'espaces munis d'une structure vectorielle, on est conduit à imposer à ces distances et à ces écarts d'être compatibles, en un sens à préciser, avec la structure vectorielle de ces espaces. On est ainsi amené à dégager la notion importante de semi-norme et à étudier les topologies définies par une norme, une semi-norme ou une famille de semi-normes.

Définition 2-*1*. — SOIT E UN ESPACE VECTORIEL SUR **K**. ON APPELLE *SEMI-NORME* SUR E TOUTE APPLICATION p DE E DANS **R** TELLE QUE :
S_1 : $p(x) \geqslant 0$ POUR TOUT $x \in E$;

$S_2 : p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ POUR TOUT $x \in E$ ET TOUT $\lambda \in \mathbf{K}$;
$S_3 : p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ POUR TOUS $x, y \in E$.

ON DIT QUE p EST UNE *NORME* SI DE PLUS $p(x) \neq 0$ POUR TOUT $x \neq O$.

Lorsqu'on étudie une semi-norme bien déterminée sur un espace E, on note en général $p(x)$ par $\|x\|$.

EXEMPLE 2-*2*. — Si f désigne une forme linéaire sur E, $|f|$ est une semi-norme sur E ; en effet on a bien :

$$|f| \geqslant 0; \quad |f(\lambda x)| = |\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot |f(x)|$$

et

$$|f(x+y)| = |f(x) + f(y)| \leqslant |f(x)| + |f(y)|.$$

Pour que cette semi-norme soit une norme, il faut que $f(x)$ ne s'annule que pour $x = O$, donc que E soit de dimension 1 ; inversement si E est de dimension 1 et si $f \neq O$, $|f|$ est bien une norme.

***Propriétés immédiates et opérations* 2-*3*.** — 1° Pour toute semi-norme p sur E, $p(O) = 0$.

2° Toute semi-norme p sur un espace vectoriel E sur $\mathbf{C}$ est aussi une semi-norme sur E considéré comme espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. En particulier, p étant sous-additive et positivement homogène est convexe sur E (voir proposition 19-*6* du chapitre VI).

Voici maintenant quelques opérations qui permettent de fabriquer des semi-normes à partir d'autres semi-normes ; elles sont très analogues à celles que nous avons étudiées à propos des écarts (chapitre V, § 15).

3° Toute combinaison *linéaire positive* (c'est-à-dire à coefficients $\geqslant 0$) de semi-normes est encore une semi-norme. En particulier toute somme finie de normes est une norme.

Par exemple, dans $\mathbf{C}^n$, la fonction $x \longrightarrow$ (coordonnée x_i) est une forme linéaire, donc $|x_i|$ est une semi-norme ; il en est donc de même de $\sum_i |x_i|$, et comme cette dernière ne s'annule que si $x = O$, c'est une norme.

4° Toute limite (partout finie) de semi-normes est une semi-norme.

5° Pour toute famille (p_i) de semi-normes dont l'enveloppe supérieure p est partout finie, p est une semi-norme.

En effet p vérifie évidemment S_1 et S_2 ; d'autre part on a pour tout i :

$$p_i(x+y) \leqslant p_i(x) + p_i(y) \leqslant p(x) + p(y),$$

d'où :

$$p(x+y) = \sup p_i(x+y) \leqslant p(x) + p(y).$$

Par exemple soit $\mathscr{B}(A, \mathbf{K})$ l'espace vectoriel des applications bornées d'un ensemble A dans $\mathbf{K}$. Pour tout $a \in A$, l'application $f \longrightarrow f(a)$ de $\mathscr{B}(A, \mathbf{K})$

dans $\mathbf{K}$ est linéaire; donc d'après l'exemple 2-2, la fonction $p_a : f \longrightarrow |f(a)|$ est une semi-norme.

Soit alors X une partie non vide quelconque de A; comme toute $f \in \mathscr{B}(A, \mathbf{K})$ est bornée, la fonction $\sup_{a \in X} p_a$ est finie; c'est donc une semi-norme; on l'appelle la semi-norme de la convergence uniforme sur X.

6° Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbf{K}$, φ une application linéaire de E dans F, et p une semi-norme sur F; alors $p \circ \varphi$ est une semi-norme sur E; la vérification en est immédiate.

L'exemple 2-2 relève de ce procédé; voici un autre exemple : Soient F_1, F_2 deux espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$, et p_1 une semi-norme sur F_1; alors la fonction $(x_1, x_2) \longrightarrow p_1(x_1)$ définie sur $F_1 \times F_2$ est une semi-norme sur $F_1 \times F_2$.

7° Voici enfin une opération analogue à celle sur les écarts étudiée au chapitre V, 15.2.6 :

Soit $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ une suite finie de semi-normes sur un espace vectoriel E, et soit φ une application croissante, convexe et positivement homogène, de $\mathbf{R}_+^n$ dans $\mathbf{R}_+$.

Alors la fonction $\varphi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ est une semi-norme sur E : La propriété S_1 est évidente; S_2 résulte de ce que φ est positivement homogène; enfin S_3 résulte de la croissance et de la sous-additivité de φ.

Par exemple, pour tout nombre $\alpha \geqslant 1$, $(\sum p_i^\alpha)^{1/\alpha}$ est une semi-norme.

***Ecart associé à une semi-norme* 2-4.** — Soit E un espace vectoriel muni d'une semi-norme p; pour tous $x, y \in E$, posons

$$d(x, y) = p(x-y).$$

Il est immédiat que

1° $$d(x, y) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad d(x, x) = 0;$$

2° $$d(x, y) = d(y, x) \quad \text{puisque } p(x-y) = p(y-x);$$

3° $$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y);$$

en effet cette inégalité s'écrit aussi

$$p(x-y) \leqslant p(x-z) + p(z-y);$$

or $$(x-y) = (x-z) + (z-y)$$

donc la dernière inégalité résulte de S_3.

Ces trois propriétés montrent que d est un écart sur E; il est immédiat que cet écart est invariant par translation, et que plus généralement une dilatation $x \to \alpha x + b$ le multiplie par $|\alpha|$.

Cet écart est fini; pour que ce soit une distance, il suffit donc que

$p(x-y)=0$ entraîne $x-y=O$, autrement dit que la semi-norme de E soit une norme.

Boules associées à une semi-norme **2-5.** — Conservons les notations précédentes. On appelle *p-boule ouverte* de centre a et de rayon ρ (où $a \in E$ et $\rho > 0$) l'ensemble $B(a, \rho)$ des points x de E tels que $d(a, x) < \rho$; on définit de la même façon les p-boules fermées en remplaçant le signe $<$ par le signe $\leqslant$. On appellera *p-boule unité* la boule $B(O, 1)$.

Il est immédiat que la dilatation $x \to \alpha x + b$ transforme $B(O, \rho)$ en $B(b, |\alpha| \rho)$; on peut donc se contenter d'étudier les boules de centre O.

PROPOSITION **2-6.** — *1° Toute p-boule ouverte* B *de centre* O *est un ensemble convexe, stable par chacune des isométries* $x \longrightarrow \alpha x$, *où* $|\alpha| = 1$.

2° Pour que p soit une norme, il faut et il suffit que $B(O, \rho)$ *ne contienne aucun sous-espace vectoriel de dimension* 1.

DÉMONSTRATION. — 1° Comme p est convexe, l'ensemble $B(O, \rho)$ des x tels que $p(x) < \rho$ est convexe (proposition 19-3, chapitre VI).

La relation $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ montre que si $|\alpha| = 1$, l'homothétie $x \longrightarrow \alpha x$ est une isométrie bijective de $B(O, \rho)$ sur elle-même.

2° S'il existe un $a \neq O$ de E tel que $p(a) = 0$, tous les points λa appartiennent à $B(O, \rho)$; par contre si $p(a) \neq 0$, il existe un λ tel que $\lambda a \notin B(O, \rho)$, par exemple $\lambda = 2\rho/p(a)$.

Même énoncé pour les boules fermées de rayon $\rho > 0$.

Notons enfin que la boule fermée $B(O, 0)$ est un sous-espace vectoriel de E, qui n'est réduit à $\{O\}$ que si p est une norme.

Boules associées à une famille de semi-normes **2-7.** — Nous avons, au chapitre V, § 16, défini et étudié la topologie associée à une distance sur un ensemble quelconque E. Si donc E est un espace vectoriel muni d'une norme, la distance associée à cette norme définit sur E une topologie. Nous étudierons de telles topologies de façon détaillée aux paragraphes 4, 5, 6; pour l'instant nous allons, de façon plus générale, définir la topologie associée à une famille de semi-normes sur un espace vectoriel.

Soit E un espace vectoriel, et soit $\mathcal{P} = (p_\iota)_{\iota \in I}$ une famille, finie ou infinie de semi-normes sur E. Désignons par $B_\iota(a, \rho)$ la p_ι-boule ouverte de centre a et de rayon ρ.

On appellera *$\mathcal{P}$-boule ouverte de centre a* toute intersection finie de p_ι-boules ouvertes de centre a (l'intersection de deux $\mathcal{P}$-boules ouvertes de centre a est donc aussi une $\mathcal{P}$-boule de centre a).

La considération du cas particulier où les éléments de $\mathcal{P}$ sont les multiples λp (où $\lambda > 0$) d'une semi-norme p montre qu'on ne peut pas parler du rayon d'une $\mathcal{P}$-boule.

Définition d'une $\mathscr{P}$-topologie. — Disons maintenant qu'une partie X de E est « ouverte » si, ou bien $X = \phi$, ou bien pour tout $x \in X$ il existe une $\mathscr{P}$-boule ouverte de centre x contenue dans X.

Il est immédiat que l'ensemble de ces « ouverts » satisfait aux axiomes O_1, O_2, O_3 des espaces topologiques; on peut donc donner la définition suivante :

Définition 2-*8*. — SOIT E UN ESPACE VECTORIEL, ET SOIT $\mathscr{P}$ UNE FAMILLE QUELCONQUE DE SEMI-NORMES SUR E. ON APPELLE *$\mathscr{P}$-TOPOLOGIE*, OU *TOPOLOGIE ASSOCIÉE À LA FAMILLE $\mathscr{P}$*, LA TOPOLOGIE SUR E DONT LES OUVERTS SONT LES ENSEMBLES X DONT TOUT POINT EST CENTRE D'UNE $\mathscr{P}$-BOULE OUVERTE CONTENUE DANS X.

Montrons que, pour cette topologie, toute p_i-boule ouverte est un ouvert; en effet, soit $x \in B_i(a, \rho)$; la boule ouverte $B_i(x, \varepsilon)$ où $\varepsilon = \rho - p_i(a-x)$ est contenue dans $B_i(a, \rho)$ car la relation :

$$p_i(x-y) < \rho - p_i(a-x)$$

entraîne
$$p_i(a-y) \leqslant p_i(a-x) + p_i(x-y) < \rho \, .$$

Il en résulte, d'après l'axiome O_2, que toute $\mathscr{P}$-boule ouverte est un ouvert; d'après l'axiome O_1, toute réunion de $\mathscr{P}$-boules ouvertes est donc un ouvert.

Inversement, la définition d'un ouvert entraîne que tout ouvert est réunion de $\mathscr{P}$-boules ouvertes. *Il y a donc identité entre les ouverts de* E *et les réunions de $\mathscr{P}$-boules ouvertes.*

La définition de la $\mathscr{P}$-topologie montre que tout voisinage d'un point a contient une $\mathscr{P}$-boule ouverte de centre a; donc tout point a de E a pour base de voisinages les $\mathscr{P}$-boules ouvertes de centre a, c'est-à-dire encore les ensembles de la forme $a+B$, où B est une $\mathscr{P}$-boule ouverte de centre O.

PROPOSITION **2-*9*.** — *Toute $\mathscr{P}$-topologie sur un espace vectoriel* E *est compatible avec la structure d'espace vectoriel de* E.

DÉMONSTRATION. — Nous allons vérifier les conditions 1, 2, 3, 4 de la proposition 1-*2*; pour cela désignons par B une $\mathscr{P}$-boule ouverte quelconque de centre O.

1° Pour tous a, $b \in E$, les boules $a+\frac{1}{2}B$ et $b+\frac{1}{2}B$ sont voisinages de a et b, et l'on a, compte tenu de la convexité de B :

$$(a+\tfrac{1}{2}B)+(b+\tfrac{1}{2}B) = (a+b)+\tfrac{1}{2}(B+B) \subset (a+b)+B \, ,$$

d'où la continuité de l'application $(x, y) \longrightarrow (x+y)$ au point (a, b).

2° Si $B = \bigcap_{i \in J} B_i(O, \rho_i)$, la condition $\lambda a \in B$ s'écrit :

$$|\lambda| p_i(a) \leqslant \rho_i \quad \text{pour tout } i \in J, \text{ ou encore } |\lambda| \leqslant \inf_{i \in J} (\rho_i p_i(a)^{-1}),$$

c'est-à-dire $|\lambda| \leqslant k$ où $k > 0$.

3° La condition $\alpha x \in B$ est vérifiée pour tout x si $\alpha = 0$; sinon elle s'écrit $x \in \alpha^{-1}B$, et $\alpha^{-1}B$ est bien un voisinage de O.

4° La condition $\lambda x \in B$ est vérifiée dès que $|\lambda| \leqslant 1$ et $x \in B$.

Critère de convergence d'une base de filtre. — Dans un espace métrique E, dire qu'une suite (x_n) de points de E converge vers un point a de E, équivaut à dire que

$$\lim_{n \to \infty} d(a, x_n) = 0\,;$$

en particulier, si E est un espace normé muni de la distance associée à la norme p, cette condition s'écrit

$$\lim_{n \to \infty} p(a - x_n) = 0\,.$$

Nous allons voir que cette condition s'étend de façon simple aux $\mathscr{P}$-topologies.

PROPOSITION 2-*10*. — *Soit $\mathscr{B}$ une base de filtre sur un espace vectoriel* E *muni d'une $\mathscr{P}$-topologie. Dire que $\mathscr{B}$ converge vers un point a de* E *équivaut à dire que, pour tout $p \in \mathscr{P}$, on a $\lim_{\mathscr{B}} p(x-a) = 0$.*

DÉMONSTRATION. — Les $\mathscr{P}$-boules ouvertes de centre a constituent une base de voisinages de a, donc dire que $\mathscr{B}$ converge vers a équivaut à dire que pour toute $\mathscr{P}$-boule ouverte B de centre a, il existe un $X \in \mathscr{B}$ contenu dans B.

D'autre part, dire que $\lim_{\mathscr{B}} p(x-a) = 0$ équivaut à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $X \in \mathscr{B}$ contenu dans la boule $\{x : p(x-a) < \varepsilon\}$.

Donc dire que $\lim_{\mathscr{B}} p(x-a) = 0$ pour tout $p \in \mathscr{P}$ équivaut à dire que pour toute famille finie de boules de la forme $\{x : p_i(x-a) < \varepsilon_i\}$, il existe un $X \in \mathscr{B}$ contenu dans chacune d'elles, donc aussi dans leur intersection. Comme toute $\mathscr{P}$-boule ouverte de centre a est une telle intersection, on a bien établi l'équivalence annoncée.

EXEMPLE 2-*11*. — Soit (f_i) une famille de formes linéaires sur un espace vectoriel E ; la famille des semi-normes $|f_i|$ définit sur E une $\mathscr{P}$-topologie qu'on appelle *topologie faible associée à la famille des formes linéaires f_i*. Si $\mathscr{B}$ est une base de filtre sur E, il revient au même de dire que

$$\lim_{\mathscr{B}} f_i(x-a) = 0\,, \quad \text{ou que} \quad \lim_{\mathscr{B}} |f_i(x-a)| = 0\,.$$

Donc d'après la proposition 2-*10*, dire que $\mathcal{B}$ converge vers a pour la topologie faible associée aux formes linéaires f_i, équivaut à dire que, pour toute f_i on a :

$$\lim_{\mathcal{B}} f_i(x-a) = 0\,, \quad \text{ou encore} \quad \lim_{\mathcal{B}} f_i(x) = f_i(a)\,.$$

Critère de continuité d'une forme linéaire. — PROPOSITION **2**-*12*. — *Soit* E *un espace vectoriel muni d'une* $\mathcal{P}$*-topologie. Dire qu'une forme linéaire* f *sur* E *est continue équivaut à dire qu'il existe une sous-famille finie* $(p_i)_{i\in J}$ *de* $\mathcal{P}$ *et une constante* $k > 0$ *telles que*

$$|f| \leqslant k \sup_{i\in J} (p_i)$$

DÉMONSTRATION. — 1° La relation écrite entraîne que $|f(x)| \leqslant k$ sur l'intersection des boules ouvertes $\{x_x : p_i(x) < 1\}_{i\in J}$. Donc d'après la proposition 1-*9*, f est continue.

2° Inversement, si f est continue, il existe une $\mathcal{P}$-boule ouverte B de centre O sur laquelle $|f(x)| \leqslant 1$.

Pour tout $x \in$ E, il existe un $\lambda > 0$ tel que $x \in \lambda$B; et pour un tel λ on a $|f(x)| \leqslant \lambda$.

Or B est de la forme

$$B = \bigcap_{i\in J} \{x : p_i(x) < \varepsilon_i\}\,.$$

On a donc $|f(x)| \leqslant \lambda$ pour tout $\lambda > 0$ tel que $p_i(x) < \lambda\varepsilon_i$, ou encore

$$\varepsilon_i^{-1} p_i(x) < \lambda \quad (\text{pour tout } i \in J)\,.$$

Il en résulte

$$|f(x)| \leqslant \sup_{i\in J} (\varepsilon_i^{-1} p_i(x))\,,$$

d'où

$$|f| \leqslant k \sup_{i\in J} p_i \qquad (\text{où } k = \sup \varepsilon_i^{-1})\,.$$

Existence de formes linéaires continues **2**-*13*. — Nous n'avons jusqu'ici aucun moyen de démontrer que sur un espace vectoriel muni d'une $\mathcal{P}$-topologie, il existe des formes linéaires continues non identiquement nulles. On trouvera dans les exercices 11-*16* la démonstration de cette existence au moyen du puissant théorème de Hahn-Banach.

Sous-espace **2**-*14*. — Soit E un espace vectoriel, et soit F un sous-espace vectoriel de E. Pour toute semi-norme p sur E, la trace de p sur F est une semi-norme q sur F ; et pour tout $a \in$ F, la trace sur F de la p-boule ouverte de centre a et de rayon ρ est la q-boule ouverte de centre a et de rayon ρ

Donc pour toute famille (p_i) de semi-normes sur E, la trace sur F de la topologie associée à la famille (p_i) est identique à la topologie associée à la famille (q_i) des traces des p_i sur F.

***Espace produit* 2-*15*.** — Soient E, F deux espaces vectoriels sur le même corps **K**, et soient (p_i), (q_j) deux familles de semi-normes sur E et F respectivement. Les espaces E et F sont munis des $\mathcal{P}$-topologies correspondantes, donc l'espace produit $E \times F$ est muni à la fois d'une structure d'espace vectoriel, et d'une topologie qui est le produit des topologies de E et F (chap. V, § 20).

D'autre part, les fonctions $(x, y) \longrightarrow p_i(x)$ et $(x, y) \longrightarrow q_j(y)$ constituent (voir 2.3.6) sur $E \times F$ une famille de semi-normes à laquelle est associée une $\mathcal{P}$-topologie. Nous allons voir que cette $\mathcal{P}$-topologie est identique au produit des topologies de E et F.

En effet les boules ouvertes de centre O associées aux semi-normes sur $E \times F$ sont les intersections finies de boules ouvertes de la forme $\{(x, y) : p_i(x) < \varepsilon_i\}$ ou $\{(x, y) : q_j(y) < \varepsilon_j\}$; autrement dit ces boules ne sont autres que des produits d'une boule ouverte de centre O dans E, et d'une boule ouverte de centre O dans F. Puisque ces produits constituent une base de voisinages de O pour la topologie produit, l'identité annoncée est démontrée.

Ce résultat s'étend évidemment à tout produit fini d'espaces vectoriels.

Critère de séparation. — PROPOSITION 2-*16*. — *Pour qu'une $\mathcal{P}$-topologie sur un espace vectoriel* E *soit séparée, il faut et il suffit que pour tout $x \neq O$ de* E, *il existe une semi-norme $p \in \mathcal{P}$ telle que $p(x) \neq 0$.*

DÉMONSTRATION. — 1° S'il existe un $x \neq O$ tel que $p(x) = 0$ pour tout $p \in \mathcal{P}$, toute $\mathcal{P}$-boule ouverte de centre O contient x, donc on ne peut pas séparer les points O et x par deux ouverts disjoints.

2° Supposons que pour tout $x \neq O$ de E, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $p(x) \neq 0$; les p-boules ouvertes $B(O, \rho)$ et $B(x, \rho)$ où $\rho = \frac{1}{2} p(x)$ sont disjointes, donc on peut séparer les points O et x par deux ouverts disjoints.

Plus généralement deux points distincts quelconques sont de la forme $y, y+x$, où $x \neq O$ et, avec les notations précédentes, on peut les séparer par les p-boules ouvertes $B(y, \rho)$ et $B\big((y+x). \rho\big)$.

$\mathcal{P}$-topologies métrisables. — PROPOSITION 2-*17*. — *Soit $\mathcal{P}$ une famille, finie ou dénombrable, de semi-normes sur* E.

1° Si $\mathcal{P}$ est finie, la topologie associée à chacune des semi-normes :

$$\sup p_i, \quad (\textstyle\sum p_i^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \textstyle\sum p_i,$$

est identique à la $\mathcal{P}$-topologie.

2° Si $\mathcal{P} = (p_n)_{n \in \mathbf{N}}$, la $\mathcal{P}$-topologie est identique à la topologie sur E *associée à l'écart :*

$$d(x, y) = \sum_n 2^{-n} p'_n(x-y), \qquad \text{où } p'_n = \inf(1, p_n).$$

DÉMONSTRATION. — 1° Si $\mathcal{P}$ a r éléments, on a :

$$\sup p_i \leqslant \left(\sum p_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum p_i \leqslant r \sup p_i .$$

Donc les écarts associés aux trois semi-normes étudiées définissent sur E la même topologie (proposition 16-*10*, chap. V).

D'autre part les boules $\bigcap_i B_i(O, \varepsilon)$ de E constituent une base de voisinages de O; or une telle boule n'est autre que la boule de rayon ε associée à la semi-norme $p = \sup p_i$; d'où l'identité de la p-topologie et de la $\mathcal{P}$-topologie.

2° Posons
$$d_r(x, y) = \sum_{n \leqslant r} 2^{-n} p'_n(x-y) .$$

La relation $d(x, y) < \varepsilon$ entraîne $d_r(x, y) < \varepsilon$; donc la d_r-boule de centre O et de rayon ε contient la d-boule de même centre et de même rayon.

Inversement, la relation $d_r(x, y) < \frac{1}{2}\varepsilon$ entraîne

$$d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{r+1}^{\infty} 2^{-n} ,$$

donc la d-boule de rayon ε contient la d_r-boule de rayon $\frac{1}{2}\varepsilon$ pour tout r tel que $\varepsilon 2^{r-1} \geqslant 1$.

Or les d_r-boules ouvertes de centre O constituent une base de voisinages de O pour la $\mathcal{P}$-topologie puisque pour tout r les topologies associées à d_r et à $\sum_{n \leqslant r} p_n$ sont identiques; d'où l'identité cherchée.

Notons enfin que d n'est pas l'écart associé à une semi-norme puisque d est borné; ce fait n'est pas lié au mode de démonstration choisi, car il existe effectivement des $\mathcal{P}$-topologies définies par une famille dénombrable de semi-normes et qui ne sont pas définissables par une semi-norme unique (voir exercice 17).

COROLLAIRE 2-*18*. — *Si $\mathcal{P}$ est finie ou dénombrable, et si la $\mathcal{P}$-topologie est séparée, cette topologie est métrisable.*

En effet nous venons de voir que dans ces deux cas la $\mathcal{P}$-topologie est définissable par un écart; si elle est séparée, cet écart est une distance.

***Le rôle des $\mathcal{P}$-topologies* 2-*19*.** — Il existe des espaces vectoriels topologiques dont la topologie n'est pas une $\mathcal{P}$-topologie (voir exercice 3), mais de tels espaces n'ont jusqu'ici joué aucun rôle dans l'Analyse.

En effet, d'une part la classe des $\mathcal{P}$-topologies suffit à la plupart des besoins des Analystes, d'autre part c'est la seule classe connue d'espaces vectoriels topologiques pour laquelle on sache établir des théorèmes substantiels et utiles.

Les espaces vectoriels munis d'une $\mathscr{P}$-topologie sont souvent désignés sous le nom d'*espaces localement convexes* parce que dans un tel espace le point O a une base de voisinages convexes, et parce qu'on peut montrer qu'inversement la topologie de tout e.v.t. ayant cette dernière propriété est une $\mathscr{P}$-topologie.

3. — Exemples classiques d'espaces vectoriels topologiques

Nous allons étudier maintenant quelques types classiques d'espaces vectoriels topologiques ; ce seront tous des espaces munis de $\mathscr{P}$-topologies ; autrement dit il s'agira dans chaque cas de définir une famille de semi-normes adaptée aux phénomènes qu'on désire mettre en évidence.

3-*1*. — Rappelons pour mémoire l'espace vectoriel $\mathscr{B}(X, \mathbf{K})$ des applications *bornées*s d'un ensemble quelconque X dans $\mathbf{K}$, muni de la norme de la convergence uniforme :

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| .$$

Lorsque X est un espace topologique compact, l'espace $\mathscr{C}(X, \mathbf{K})$ des fonctions continues est un sous-espace de $\mathscr{B}(X, \mathbf{K})$ particulièrement important.

3-*2*. — Soit $\mathscr{C}^r([0, 1], \mathbf{K})$ l'espace des applications de $[0, 1]$ dans $\mathbf{K}$, qui admettent des dérivées continues jusqu'à l'ordre r inclus (où $r \in \mathbf{N}$). On y définit la topologie de la convergence uniforme pour chaque dérivée d'ordre $\leqslant r$, en munissant cet espace de la famille des semi-normes p_i suivantes :

$$p_i(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f^{(i)}(t)| . \qquad (\text{où } i = 0, 1, \ldots, r)$$

D'après la proposition 2-*16*, cette topologie peut aussi être définie par la norme unique :

$$p(f) = \sum_0^r p_i(f) .$$

On définirait de même la topologie de l'espace $\mathscr{C}^r([0, 1]^n, \mathbf{K})$ des applications du pavé $[0, 1]^n$ dans $\mathbf{K}$, qui ont toutes leurs dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre r inclus, par les semi-normes suivantes :

$$p_i(f) = \sup |D^i f(t)| ,$$

où D^i est un monôme de dérivation d'ordre global $|i| \leqslant r$.

Notons que pour $r = 0$, les espaces $\mathscr{C}^r([0, 1]^n, \mathbf{K})$ et $\mathscr{C}([0, 1]^n, \mathbf{K})$ sont identiques.

3-*3*. — On désigne par $\mathscr{C}^\infty([0,1]^n, \mathbf{K})$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur $[0,1]^n$ à valeurs dans $\mathbf{K}$, muni des semi-normes p_i définies dans 3-*2*.

D'après la proposition 2-*16*, la topologie associée à cette famille peut être définie par une distance; cependant pour vérifier la convergence d'une base de filtre, il est beaucoup plus simple et plus intuitif d'appliquer le critère indiqué dans la proposition 2-*10*, que d'utiliser cette distance.

3-*4*. — Voici une famille d'espaces analogues aux précédents : Soit K un compact de $\mathbf{R}^n$; on désigne par $\mathscr{D}^r_{\mathrm{K}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{K})$ ou plus brièvement $\mathscr{D}^r_{\mathrm{K}}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible, l'espace des applications de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{K}$ qui admettent des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre r inclus, et qui sont nulles hors du compact K.

Comme dans 3-*2* on munit cet espace de la topologie associée aux semi-normes suivantes :

$$p_i(f) = \sup_{t \in \mathrm{R}^n} |\mathrm{D}^i f(t)|.$$

On définirait de façon analogue l'espace $\mathscr{D}^r_{\mathrm{K}}([0,1]^n, \mathbf{K})$.

3-*5*. — Soit p un nombre réel $\geqslant 1$; pour toute suite infinie $x = (x_i)$ d'éléments de $\mathbf{K}$, définissons le nombre positif $\|x\|$, fini ou infini, par :

$$\|x\|^p = \sum_i |x_i|^p.$$

De l'inégalité de Minkowski (chapitre VI, 20-7) on déduit :

$$\Big(\sum_0^n |x_i + y_i|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_0^n |x_i|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_0^n |y_i|^p\Big)^{1/p} \leqslant \|x\| + \|y\|$$

d'où
$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Il résulte de cette inégalité et de la relation évidente $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, que l'ensemble des x tels que $\|x\| < \infty$ est un espace vectoriel, et que $\|x\|$ est une semi-norme sur cet espace; en outre $\|x\|$ n'est nul que si $x_i = 0$ pour tout i, donc $\|x\|$ est une norme sur cet espace.

On désigne par l^p cet espace (réel ou complexe) muni de cette norme. En particulier l'espace l^1 peut être identifié à l'espace des séries absolument convergentes; quant à l^2, nous le retrouverons lors de l'étude des espaces de Hilbert. On démontrera en *8-9* que ces espaces sont complets, pour la métrique associée à leur norme.

3-*6*. — Voici maintenant un espace important que nous ne pourrons définir dans toute sa généralité que lorsque nous connaîtrons la théorie de l'intégration :

Soit à nouveau p un nombre réel $\geqslant 1$; pour tout $f \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbf{K})$, définissons le nombre réel positif $\|f\|$ par

$$\|f\|^p = \int_0^1 |f(t)|^p \, dt .$$

A toute suite croissante finie $\sigma = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ de points de $[0, 1]$, où $t_1 = 0$ et $t_n = 1$, associons l'expression $\|f\|_\sigma$ définie par :

$$\|f\|_\sigma^p = \sum_i (t_{i+1} - t_i) |f(t_i)|^p .$$

L'inégalité de Minkowski montre que $\|f+g\|_\sigma \leqslant \|f\|_\sigma + \|g\|_\sigma$.

Or lorsque le module de σ (chapitre V, 24-*6*) tend vers 0, $\|f\|_\sigma$ tend vers $\|f\|$; on en déduit que $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

Cette inégalité, jointe au fait que $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ et que $\|f\|$ n'est nul que si $f = O$, montre que $\|f\|$ est une norme sur $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{K})$; pour $p = 1$ on l'appelle norme de la convergence en moyenne; pour $p = 2$ on l'appelle norme de la convergence en moyenne quadratique.

Nous abordons maintenant dans les deux exemples suivants la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

3-*7*. — Soit X un espace topologique séparé; pour tout compact $K \subset X$, toute $f \in \mathscr{C}(X, \mathbf{K})$ est bornée sur K; donc si l'on pose :

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)| ,$$

p_K est une semi-norme sur $\mathscr{C}(X, \mathbf{K})$. La $\mathscr{P}$-topologie définie sur $\mathscr{C}(X, \mathbf{K})$ par la famille des p_K s'appelle topologie de la convergence uniforme sur tout compact (ou plus brièvement *convergence uniforme compacte*). Pour toute $f \neq O$, il existe un compact K tel que $p_K(f) \neq 0$, donc cette topologie est séparée.

D'après la proposition 2-*10*, si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{C}(X, \mathbf{K})$ et si $\mathscr{B}$ est une base de filtre sur I, dire que pour cette topologie les f_i convergent vers f suivant $\mathscr{B}$ signifie que, pour tout compact $K \subset X$, les f_i convergent uniformément vers f sur K.

Il est souvent commode de remplacer la famille (p_K) par une sous-famille qui définisse la même topologie : Si (K_j) désigne une famille de compacts de X qui soit absorbante en ce sens que tout compact K soit contenu dans un K_j, on vérifiera que la famille (p_{K_j}) définit la même topologie que la famille de tous les p_K.

Pour tout sous-espace vectoriel E de $\mathscr{C}(X, \mathbf{K})$, la trace sur E de la topologie de $\mathscr{C}(X, \mathbf{K})$ s'appelle aussi topologie de la convergence uniforme compacte.

Par exemple, soit D un domaine (ouvert connexe) de $\mathbf{C}^n$, et soit $\mathscr{H}(D)$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes [1] sur D. La topologie la plus utile sur $\mathscr{H}(D)$ est la topologie de la convergence uniforme sur tout compact ; du fait qu'il existe dans D une famille dénombrable et absorbante de compacts (on le vérifiera) résulte que la topologie de $\mathscr{H}(D)$ peut être définie par une famille dénombrable d'écarts; comme en outre cette topologie est séparée, elle est métrisable (voir proposition 2-*16*).

3-*8*. — Soit A un ouvert de $\mathbf{R}^n$, et soit r un entier $\geqslant 0$; on désigne par $\mathscr{E}^r(A, \mathbf{K})$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(A, \mathbf{K})$ constitué par les fonctions qui possèdent des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre r inclus.

Pour tout compact $K \subset A$ et tout monôme de dérivation D^i d'ordre global $|i| \leqslant r$, on pose

$$p_{K,i}(f) = \sup_{t \in K} |D^i f(t)|.$$

La topologie définie sur $\mathscr{E}^r(A, \mathbf{K})$ par la famille des semi-normes $p_{K,i}$ s'appelle topologie de la convergence uniforme compacte pour toutes les dérivées d'ordre $\leqslant r$.

Comme dans l'exemple précédent, on peut imposer au compact K d'appartenir à une famille dénombrable et absorbante; donc la topologie de $\mathscr{E}^r(A, \mathbf{K})$ est métrisable.

On définit de façon analogue $\mathscr{E}^\infty(A, \mathbf{K})$; sa topologie est aussi métrisable.

3-*9*. — On désigne par $\mathscr{D}^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{K})$ le sous-espace de $\mathscr{C}(\mathbf{R}^n, \mathbf{K})$ constitué par les fonctions nulles hors d'un compact, et qui possèdent des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre r inclus.

On définit la topologie de cet espace par la famille des semi-normes $p_{\varphi,i}$ ainsi définies :

D^i est un monôme de dérivation d'ordre global $|i| \leqslant r$; φ est un élément quelconque de $\mathscr{C}(\mathbf{R}^n, \mathbf{K})$; et on pose :

$$p_{\varphi,i}(f) = \sup_{t \in \mathbf{R}^n} |\varphi(t) D^i f(t)|.$$

On peut démontrer que, contrairement aux topologies précédentes, la topologie ainsi définie n'est pas métrisable.

On pourrait définir de façon analogue une topologie sur $\mathscr{D}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{K})$, mais en fait celle qui est utile sur cet espace doit être définie par d'autres semi-normes.

---

(1) Une application f de D dans $\mathbf{C}$ est dite holomorphe si au voisinage de tout point (a_i) de D, f est égale à la somme d'une série entière absolument convergente par rapport aux variables $(z_i - a_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Voici maintenant deux exemples de topologies faibles.

3-*10*. — Soit à nouveau $\mathcal{F}(X, \mathbf{K})$ l'espace des applications d'un ensemble X dans $\mathbf{K}$. Pour tout $a \in X$, la fonction $f \longrightarrow f(a)$ est une forme linéaire; la topologie sur $\mathcal{F}(X, \mathbf{K})$ définie par la famille des semi-normes $f \longrightarrow |f(a)|$ s'appelle *topologie de la convergence simple sur* X. C'est une topologie faible; donc (voir exemple 2-*11*) dire qu'une famille de fonctions f_i converge simplement vers une fonction f (suivant une base de filtre) équivaut à dire que, pour tout $x \in X$, les $f_i(x)$ convergent vers $f(x)$ dans $\mathbf{K}$.

3-*11*. — Soit E un espace vectoriel topologique; soit E′ son dual topologique. La topologie faible sur E associée à l'ensemble des formes linéaires $l \in E'$ s'appelle la *topologie affaiblie* de E, ou plus simplement la topologie faible de E. Cette topologie est séparée lorsque, pour tout $x \neq O$ de E, il existe une $l \in E'$ telle que $l(x) \neq 0$, autrement dit lorsque, au sens de la définition 12-*3* du chapitre VI, les formes linéaires continues sur E séparent les points de E.

Dans E, dire que des x_i convergent faiblement vers un point x, équivaut à dire que, pour toute $l \in E'$, les $l(x_i)$ convergent vers $l(x)$.

Nous rencontrerons par exemple cette topologie affaiblie lors de l'étude des espaces de Hilbert.

De façon analogue le dual E′ d'un e.v.t. E est muni d'une topologie faible très utile associée à l'ensemble des formes linéaires $\varphi_a : l \longrightarrow l(a)$, où a est un point quelconque de E.

On trouvera dans les exercices 5, 30, 32, 59, etc., des exemples moins classiques d'e.v.t.

Utilisation de ces espaces vectoriels topologiques. — Une topologie bien choisie sur un espace vectoriel E de fonctions fournit, en même temps qu'un langage commode, la possibilité d'utiliser toutes les notions et les résultats de la théorie des e.v.t.

Elle conduit d'autre part à la définition d'êtres mathématiques nouveaux constitués par les éléments du dual E′. En voici deux exemples importants :

3-*12*. — Soit X un espace topologique compact; les éléments du dual de $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ muni de la topologie de la convergence uniforme sont appelés *mesures de Radon réelles*.

La plus connue de ces mesures est la mesure de Lebesgue de [0, 1] définie (pour X = [0, 1]) par la forme linéaire continue :

$$f \rightarrow \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Nous reviendrons sur les mesures de Radon lors de l'étude de l'intégration.

3-*13*. — Les éléments du dual de $\mathscr{D}^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ sont appelés *distributions réelles d'ordre r*. Elles sont un cas particulier des distributions de L. Schwarz.

Les distributions d'ordre 0 sont les mesures de Radon sur $\mathbf{R}^n$.

II. — ESPACES NORMÉS

Les espaces normés ont été introduits dans l'Analyse après les espaces de Hilbert et ils ont été beaucoup étudiés, en particulier par Banach, avant même qu'on ait développé une théorie générale des espaces vectoriels topologiques.

Bien que leur importance ait diminué lorsqu'on eut découvert les topologies associées à une famille de semi-normes, ils constituent encore un outil puissant, et leur étude est relativement simple.

4. — Topologie associée à une norme; applications linéaires continues

Définition 4-*1*. — ON APPELLE *ESPACE NORMÉ* TOUT ESPACE VECTORIEL E MUNI D'UNE NORME. ON DIT QU'UN ESPACE NORMÉ E EST UN *ESPACE DE BANACH* S'IL EST COMPLET POUR LA DISTANCE ASSOCIÉE À LA NORME.

Par exemple l'espace $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{K})$ muni de la norme de la convergence uniforme est un espace de Banach puisqu'il est complet (chapitre V, 22-*7*); par contre ce même espace muni de la norme de la convergence en moyenne n'est pas complet (raisonner comme dans 14-*7*, chap. VII).

Rappelons que la somme et l'enveloppe supérieure de toute famille finie de normes est aussi une norme.

Rappelons aussi que la distance associée à une norme p sur E est définie par :

$$d(x, y) = p(x - y).$$

A cette distance est associée une topologie qu'on appelle topologie de l'espace normé E; d'après la proposition 2-*9*, cette topologie est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E; nous allons redémontrer ce résultat en le précisant.

PROPOSITION 4-2. — *Soit* E *un espace normé sur* **K**.

1° L'application $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ *de* $\mathbf{K} \times E$ *dans* E *est continue;*

2° L'application $(x, y) \longrightarrow x+y$ *de* $E \times E$ *dans* E *est lipschitzienne de rapport 2;*

3° L'application $x \longrightarrow \|x\|$ *de* E *dans* **R** *est lipschitzienne de rapport* 1.

DÉMONSTRATION. — 1° On a :

$$\Delta(\lambda x) = (\lambda + \Delta\lambda)(x + \Delta x) - \lambda x = \Delta\lambda \cdot x + \lambda \Delta x + \Delta\lambda \cdot \Delta x$$

d'où
$$\|\Delta(\lambda x)\| \leqslant |\Delta\lambda| \cdot \|x\| + |\lambda| \cdot \|\Delta x\| + |\Delta\lambda| \cdot \|\Delta x\|.$$

Donc $\|\Delta(\lambda x)\|$ tend vers 0 lorsque $|\Delta\lambda|$ et $\|\Delta x\|$ tendent vers 0; d'où la continuité de l'application $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$.

Par contre cette application n'est pas uniformément continue lorsque E n'est pas réduit à O; en effet soit $a \neq O$ dans E, et prenons $x = \lambda a$; l'application $(\lambda, \lambda) \longrightarrow \lambda^2$ n'est pas uniformément continue, donc l'application $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda \cdot \lambda a = \lambda^2 a$ ne l'est pas non plus.

2° Les relations :

$$\Delta(x+y) = (x + \Delta x) + (y + \Delta y) - (x+y) = \Delta x + \Delta y;$$

$$\|\Delta x + \Delta y\| \leqslant \|\Delta x\| + \|\Delta y\|$$

montrent que l'application $(x, y) \longrightarrow x+y$ est lipschitzienne de rapport 2 (pour les normes usuelles sur $E \times E$).

3° La relation $\big| \|x + \Delta x\| - \|x\| \big| \leqslant \|\Delta x\|$ montre que la fonction $\|x\|$ est lipschitzienne de rapport 1.

Applications linéaires continues. — Le fait que dans tout espace normé l'origine admette une base de voisinages constituée par les homothétiques d'une même boule va permettre une caractérisation simple des applications linéaires continues d'un espace normé dans un autre.

THÉORÈME 4-3. — *Soient* E, F *deux espaces normés, et* f *une application linéaire de* E *dans* F. *Les trois énoncés suivants sont équivalents:*

1° f *est continue;*

2° f *est bornée sur toute partie bornée de* E*;*

3° Il existe une constante $k > 0$ *telle que, pour tout* $x \in E$ *on ait*

$$\|f(x)\| \leqslant k\|x\|.$$

Lorsque l'une de ces conditions est satisfaite, f *est lipschitzienne.*

DÉMONSTRATION. — Rappelons d'abord qu'une partie X d'un espace métrique est dite bornée si son diamètre est fini; dans un espace normé, cette

condition se traduit plus simplement par le fait que X est contenue dans une boule de centre O.

1 ⇒ 2. — La continuité de f en O entraîne qu'il existe dans E une boule ouverte B (O, ρ) dont l'image par f soit contenue dans la boule unité de F. Par homothétie, l'image par f de toute boule X de centre O de E est contenue dans une boule de F; il en est donc de même de toute partie bornée X de E.

2 ⇒ 3. — La sphère unité $S = \{x : \|x\| = 1\}$ de E est bornée; donc $f(S)$ est bornée, autrement dit il existe une constante $k \geqslant 0$ telle que

$$\|f(x)\| \leqslant k = k\,\|x\| \qquad \text{pour tout } x \in S\,.$$

Or tout point y de E est de la forme λx, où $x \in S$ et $\lambda \geqslant 0$; la relation $\lambda\|f(x)\| \leqslant k\lambda\|x\|$ peut donc s'écrire :

$$\|f(y)\| \leqslant k\,\|y\| \qquad \text{pour tout } y \in E\,.$$

3 ⇒ 1. — En effet, $\|f(x)\| \leqslant k\,\|x\|$ entraîne :

$$\|f(u) - f(v)\| = \|f(u-v)\| \leqslant k\,\|u-v\|\,.$$

Donc f est lipschitzienne de rapport k, donc aussi continue.

Normes équivalentes. — Nous avons vu au chapitre V, § 16 qu'une même topologie peut être définie par des distances d_1, d_2 non équivalentes en ce sens que $d_1(x, y)$ et $d_2(x, y)$ ne tendent pas simultanément vers 0; nous allons voir que cette singularité ne peut pas se produire pour les distances associées à des normes.

Définition 4-*4*. — ON DIT QUE DEUX NORMES SUR UN ESPACE VECTORIEL E SONT *ÉQUIVALENTES* SI LES TOPOLOGIES ASSOCIÉES À CES NORMES SONT IDENTIQUES.

C'est évidemment une relation d'équivalence; on la notera par le signe $\sim$.

PROPOSITION **4-*5***. — *Soient p_1, p_2 deux normes sur un espace vectoriel* E.
$(p_1 \sim p_2) \Longleftrightarrow (\exists\, k_1, k_2 \in \mathbf{R}_+$ *tels que* $p_2 \leqslant k_1 p_1$ *et* $p_1 \leqslant k_2 p_2)$.

DÉMONSTRATION. — C'est une conséquence de la proposition 4-*3* : En effet, dire que $p_1 \sim p_2$ revient à dire que l'application linéaire $x \longrightarrow x$ de E muni de la norme p_1 dans E muni de la norme p_2 est continue, et inversement; c'est-à-dire qu'il existe deux nombres k_1, $k_2 \geqslant 0$ tels que

$$p_2(x) \leqslant k_1 p_1(x) \quad \text{et} \quad p_1(x) \leqslant k_2 p_2(x) \qquad \text{pour tout } x \in E\,.$$

Ces nombres k_1, k_2 sont évidemment > 0.

Z Nous montrerons au paragraphe 7 que toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes. Par contre voici

un exemple d'espace vectoriel de dimension infinie sur lequel existent deux normes non équivalentes :

C'est l'espace $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{K})$ muni de la norme p_1 de la convergence uniforme, et de la norme p_2 définie par

$$p_2(f) = \int_0^1 |f(t)|\, dt.$$

On a évidemment $p_2 \leqslant p_1$; mais par contre, si l'on désigne par f_n le monôme $t \longrightarrow t^n$, on a :

$$p_1(f_n) = 1 \qquad \text{alors que } p_2(f_n) = (n+1)^{-1}.$$

Il n'existe donc aucune constante k telle que $p_1 \leqslant kp_2$.

Choix d'une norme sur $\mathscr{L}$ **(E, F).** – Essayons de trouver, sur l'espace vectoriel $\mathscr{L}$ (E, F) des applications linéaires continues de E dans F, une norme qui caractérise la grandeur d'un élément f de $\mathscr{L}$ (E, F). Il est hors de question d'utiliser la norme de la convergence uniforme dans E tout entier puisque, mise à part l'application O, aucune f de $\mathscr{L}$(E, F) n'est bornée dans E. Par contre nous avons caractérisé les applications linéaires f continues par le fait d'être bornées sur la boule unité B de E; et d'autre part deux éléments de $\mathscr{L}$(E, F) qui coïncident sur cette boule unité sont identiques; on est donc amené à utiliser la norme de la convergence uniforme sur la boule B, autrement dit à poser pour toute $f \in \mathscr{L}$(E, F) :

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)\| \qquad \text{ou encore} \qquad \sup_{\|x\| = 1} \|f(x)\|.$$

C'est évidemment une semi-norme (utiliser 2-*3*-5 et 2-*3*-6); et comme $f = O$ si $f(x) = O$ pour tout $x \in B$, c'est une norme.

La démonstration de l'implication $(2 \Rightarrow 3)$ dans la proposition 4-*3* montre que $\|f\|$ est la plus petite constante $k \geqslant 0$ telle que $\|f(x)\| \leqslant k\|x\|$ pour tout $x \in E$; en particulier on peut donc écrire $\|f(x)\| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|$. En résumé :

PROPOSITION 4-*6*. – *La fonction :* $f \rightarrow \|f\|$ *est une norme sur* $\mathscr{L}$ (E, F). *Pour toute* $f \in \mathscr{L}$ (E, F), $\|f\|$ *est le plus petit nombre* $k \geqslant 0$ *tel que* $\|f(x)\| \leqslant k\|x\|$ *pour tout* $x \in E$.

Z Si l'on remplace les normes de E, F par des normes équivalentes, il est immédiat que $\|f\|$ est remplacée par une norme équivalente. Donc la topologie de $\mathscr{L}$(E, F) ne dépend que de la topologie de E et F.

Lorsque les normes de E et F sont précisées, la norme que nous avons définie sur $\mathscr{L}$(E, F) est la norme usuelle. Elle est particulièrement commode par la simplicité de sa définition et aussi à cause de la propriété suivante :

Soient E, F, G trois espaces normés, et soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $g \in \mathscr{L}(F, G)$; la relation :

$$\|g(f(x))\| \leqslant \|g\| \cdot \|f(x)\| \leqslant \|g\| \cdot \|f\| \cdot \|x\|$$

montre que

$$\|g \circ f\| \leqslant \|g\| \cdot \|f\|.$$

Donc la norme choisie est bien adaptée à la composition des applications linéaires.

Toutefois il peut être commode dans certains cas de la remplacer par d'autres normes équivalentes. Par exemple, à toute application linéaire f de $\mathbf{K}^n$ dans lui-même, définie par une matrice (a_{ij}) dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$, associons la somme :

$$\|f\| = \sum_{i,j} |a_{ij}|.$$

C'est une norme parfois utilisée sur $\mathscr{L}(\mathbf{K}^n)$; elle vérifie d'ailleurs aussi l'inégalité $\|g \circ f\| \leqslant \|g\| \cdot \|f\|$.

Proposition 4-7. — *Lorsque* F *est complet,* $\mathscr{L}$(E, F) *l'est aussi.*

Démonstration. — Supposons F complet, et soit (f_n) une suite de Cauchy de $\mathscr{L}$(E, F). Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que $(p, q \geqslant n_0)$ entraîne $\| f_p - f_q \| \leqslant \varepsilon$; pour tout $x \in E$ on a alors :

$$\| f_p(x) - f_q(x) \| \leqslant \|f_p - f_q\| . \| x \| \leqslant \varepsilon \| x \|, \tag{1}$$

ce qui montre que la suite $f_n(x)$ est de Cauchy dans F, donc a une limite $f(x)$.

Comme f est limite simple de fonctions linéaires, elle est linéaire. Laissons alors p fixe dans (1) et faisons tendre q vers l'infini ; il vient :

$$\| f_p(x) - f(x) \| \leqslant \varepsilon \| x \|. \tag{2}$$

Cette inégalité montre, d'une part que f est, comme f_p, bornée sur la boule unité, autrement dit que $f \in \mathscr{L}$(E, F), d'autre part que pour tout $p \geqslant n_0$, $\| f - f_p \| \leqslant \varepsilon$, ce qui démontre la convergence de f_n vers f dans $\mathscr{L}$(E, F).

En particulier, puisque **K** est complet, on peut énoncer :

Corollaire 4-*8*. — *Le dual* E' *de tout espace normé est complet.*

Prolongement d'une application linéaire continue. — Nous avons démontré au chapitre V (théorème 20-*14*) qu'une application uniformément continue d'une partie X partout dense d'un espace métrique E dans un espace métrique *complet* F se prolonge de façon unique en une application continue de E dans F.

Ce résultat général va conduire à l'énoncé suivant :

PROPOSITION 4-*9*. — *Soit* X *un sous-espace vectoriel partout dense d'un espace normé* E, *et soit* f *une application linéaire continue de* X *dans un espace normé* complet F.

Il existe alors une application continue unique g *de* E *dans* F *dont la restriction à* X *soit* f; *cette application* g *est linéaire, et l'on a* $\|g\| = \|f\|$.

DÉMONSTRATION. — L'inégalité $\|f(u)-f(v)\| \leqslant \|f\|\cdot\|u-v\|$ montre que f est lipschitzienne de rapport $\|f\|$; donc d'après le théorème 20-*14* du chapitre V, f possède un prolongement continu unique g à E, et g est lipschitzienne de rapport $\|f\|$.

Vérifions que g est linéaire :

Soient $x, y \in$ E; ils sont respectivement limite de deux suites (x_n) et (y_n) de points de X.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tous scalaires λ, μ, on a :

$$g(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda g(x_n) + \mu g(y_n).$$

Or l'addition et la multiplication scalaire sont continues dans E et dans F, et en outre g est continue; donc chaque membre de cette relation tend vers la limite attendue lorsque $n \to \infty$; on a donc :

$$g(\lambda x + \mu y) = \lambda g(x) + \mu g(y).$$

Autrement dit g est linéaire.

Le fait que g soit lipschitzienne de rapport $\|f\|$ permet d'écrire

$$\|g(x)\| \leqslant \|f\|\cdot\|x\|.$$

Autrement dit $\|g\| \leqslant \|f\|$; mais d'autre part g est un prolongement de f, donc $\|f\| \leqslant \|g\|$, d'où l'égalité cherchée.

COROLLAIRE 4-*10*. — *Toute application linéaire continue* f *d'un sous-espace vectoriel* X *d'un espace normé* E *dans un espace normé complet* F *se prolonge de façon unique en une application linéaire continue de* $\overline{\mathrm{X}}$ *dans* F.

En effet, d'après la proposition 1-*5*, $\overline{\mathrm{X}}$ est un sous-espace vectoriel de E; et comme X est partout dense dans $\overline{\mathrm{X}}$, on peut appliquer la proposition 4-*9*.

EXEMPLE. — Comme $\mathbf{K}$ est complet, les énoncés 4-*9* et 4-*10* s'appliquent au prolongement des formes linéaires continues.

REMARQUE 4-*11*. — L'exemple suivant montrera la raison pour laquelle il est essentiel que F soit complet :

Soit E un espace normé complet de dimension infinie; et soit X = F un sous-espace vectoriel partout dense de E et distinct de E (par exemple

$E = \mathscr{C}([0,1], \mathbf{K})$ et X est le sous-espace constitué par les polynômes). Prenons pour f l'application identique de X dans F. On vérifiera que f ne possède aucun prolongement continu à E tout entier.

Exemples d'applications linéaires continues 4-*12*. — 1° Soit $\varphi \in \mathscr{C}([0,1], \mathbf{K})$; l'application linéaire $f \longrightarrow \varphi f$ de $\mathscr{C}([0,1], \mathbf{K})$ dans lui-même est continue et de norme $\|\varphi\|$. Pour que ce soit un isomorphisme de $\mathscr{C}([0,1], \mathbf{K})$ sur lui-même, il faut et il suffit que φ ne s'annule en aucun point de $[0, 1]$.

2° Pour tout $f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbf{K})$, désignons par Pf la primitive de f qui s'annule au point 0. L'application linéaire $f \longrightarrow Pf$ de $\mathscr{C}([0,1], \mathbf{K})$ dans lui-même est injective et de norme 1.

3° Soient A, B deux espaces compacts, et soit φ une application continue de A dans B. L'application $f \longrightarrow f \circ \varphi$ de $\mathscr{C}(B, \mathbf{K})$ dans $\mathscr{C}(A, \mathbf{K})$ est linéaire et de norme 1.

4° Soit (k_n) une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ tels que $|k_n| \leqslant k < \infty$; l'application $(x_n) \longrightarrow (k_n x_n)$ de l^p dans lui-même est linéaire et de norme $\leqslant k$.

5° L'application $(x_n) \longrightarrow (x'_n)$, où $x'_n = x_{n+1}$ de l^p dans lui-même est linéaire et de norme 1.

Voici maintenant deux exemples d'applications linéaires qui ne sont pas continues :

6° Soit E le sous-espace normé de $\mathscr{C}([0,1], \mathbf{K})$ (muni de sa norme usuelle) constitué par les fonctions f qui ont une dérivée f' continue.

L'application linéaire $f \longrightarrow f'$ de E dans $\mathscr{C}([0,1], \mathbf{K})$ n'est pas continue puisque par exemple, si on pose $f_n(x) = n^{-1} \sin nx$, la suite f_n converge vers O alors que la suite f'_n ne converge pas vers O.

7° Soit p_1 la norme de la convergence en moyenne sur $\mathscr{C}([0,1], \mathbf{K})$ et soit p_2 sa norme usuelle. L'application identique de cet espace muni de la norme p_1 dans le même espace muni de la norme p_2 n'est pas continue.

Z On remarquera que dans les deux exemples 6 et 7 d'applications linéaires non continues, l'espace de départ n'est pas complet. Ce n'est pas là l'effet d'un hasard ; on peut en effet montrer (voir exercice 62) que toute application linéaire d'un espace de Banach dans un espace normé, qui possède un certain degré de régularité, est nécessairement continue. Certes on peut, en utilisant l'axiome du choix (voir exercice 69), définir des formes linéaires non continues sur tout espace de Banach de dimension infinie, mais il s'agit là de construction d'une famille de fonctions plutôt que d'une fonction construite effectivement.

En résumé on peut s'attendre à ce que toute application linéaire d'un espace de Banach dans un espace normé construite par les procédés courants de l'Analyse, soit continue.

Caractérisation des espaces normés complets. — Voici un critère qu'il est souvent commode d'utiliser :

PROPOSITION 4-*13*. — *Soit* E *un espace normé, et soit k un nombre quelconque tel que* $0 < k < 1$.

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1° E *est complet.*

2° *Pour toute suite* (a_n) *d'éléments de* E *telle que* $\sum_n \|a_n\| < \infty$, *la suite des sommes partielles* $s_n = \sum_0^n a_i$ *est convergente.*

3° Pour toute suite (a_n) *d'éléments de* E *telle que* $\|a_n\| \leqslant k^n$ *pour tout* n, *la suite des sommes partielles* $s_n = \sum_0^n a_i$ *est convergente.*

DÉMONSTRATION. — (1) $\Longrightarrow$ (2), car les inégalités :

$$\|s_{n+p} - s_n\| \leqslant \sum_{n+1}^{n+p} \|a_i\| \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} \|a_i\|,$$

reste de la série convergente des $\|a_i\|$, montrent que la suite (s_n) est une suite de Cauchy, donc est convergente.

(2) $\Longrightarrow$ (3) puisque (3) est un cas particulier de (2). Enfin, supposons (3) vérifié, et soit (x_n) une suite de Cauchy de E. On peut, par récurrence, trouver une sous-suite (x_{i_n}) de la suite (x_n) telle que pour tout $p \geqslant i_n$, on ait $\|x_p - x_{i_n}\| \leqslant k^n$.

Posons

$$a_0 = x_{i_0} \quad \text{et} \quad a_n = (x_{i_{n+1}} - x_{i_n}) \quad \text{pour tout } n > 0 .$$

On a bien $\|a_n\| \leqslant k^n$, donc la suite des sommes partielles

$$s_n = (a_0 + a_1 + \ldots + a_{n+1})$$

converge ; or s_n n'est autre que que x_{i_n} ; donc la sous-suite (x_{i_n}) de la suite (x_n) converge ; comme celle-ci est de Cauchy, elle converge aussi vers le même point, ce qui montre que E est complet.

REMARQUE. — Le choix de la constante k dépend du cas particulier envisagé ; en théorie de l'intégration, il est souvent commode de prendre $k = 1/4$.

5. — Stabilité des monomorphismes et isomorphismes

Disons d'abord de façon précise ce que nous entendons par monomorphisme et isomorphisme.

Définition 5-*1*. — SOIENT E, F DEUX ESPACES NORMÉS, ET SOIT f UNE APPLICATION LINÉAIRE DE E DANS F.

ON DIT QUE f EST UN *MONOMORPHISME* SI f EST INJECTIVE ET SI f EST CONTINUE AINSI QUE L'APPLICATION RÉCIPROQUE f^{-1} DE $f(\mathrm{E})$ SUR E.

SI EN OUTRE $f(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$, ON DIT QUE f EST UN *ISOMORPHISME*.

PROPOSITION 5-*2*. — *Dire qu'une application linéaire f de* E *dans* F *est un monomorphisme équivaut à dire qu'il existe deux constantes k_1, $k_2 > 0$ telles que pour tout $x \in \mathrm{E}$ on ait :*

$$k_1\|x\| \leqslant \|f(x)\| \leqslant k_2\|x\|.$$

DÉMONSTRATION. — Supposons que f soit un monomorphisme ; la continuité de f entraîne l'existence de k_2 ; celle de f^{-1} entraîne l'existence de k_1 (la meilleure constante k_1 étant $\|f^{-1}\|^{-1}$).

Inversement, si $k_1\|x\| \leqslant \|f(x)\|$, f est injective et f^{-1} est continue; si de plus $\|f(x)\| \leqslant k_2\|x\|$, f est continue.

EXEMPLE. — On vérifiera que dans l'exemple 2 de 4-*12*, l'application injective $f \longrightarrow \mathrm{P}f$ est continue mais n'est pas un monomorphisme.

COROLLAIRE 5-*3*. — *Le sous-ensemble* I *de* $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *constitué par les monomorphismes est ouvert.*

DÉMONSTRATION. — Supposons que f soit un monomorphisme, donc satisfasse à une relation du type ci-dessus; pour toute $g \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ telle que $\|g\| < k_1$ on a :

$$(k_1 - \|g\|)\,\|x\| \leqslant \|f(x) + g(x)\| \leqslant (k_1 + k_2)\,\|x\|\,.$$

Comme $k_1 - \|g\| > 0$, $(f+g)$ est un monomorphisme.

Ce corollaire 5-*3* met en évidence une certaine stabilité des monomorphismes puisqu'il montre qu'une application linéaire f qui est un monomorphisme le demeure après addition d'une « petite » application linéaire. On peut généraliser un peu ce résultat comme suit :

PROPOSITION 5-*4*. — *Soit* A *un espace métrique quelconque; soit f une injection de* A *dans un espace normé* F *qui multiplie les distances au moins par un facteur* $\mathrm{K} > 0$ (*autrement dit f^{-1} est lipschitzienne de rapport* K^{-1})*; soit g une autre application de* A *dans* F *qui soit lipschitzienne de rapport* $k < \mathrm{K}$.

Alors l'application $(f+g)$ de A *dans* F *est injective et multiplie les distances au moins par* $(\mathrm{K} - k)$.

C'est une conséquence immédiate de la relation :

$$\|(f+g)(x) - (f+g)(y)\| = \|(f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y))\| \geqslant (\mathrm{K} - k)\,d(x, y).$$

Ajoutons que si f est lipschitzienne, $(f+g)$ l'est aussi.

Les énoncés qui suivent vont supposer que l'espace F est complet et conduiront plus tard à des applications importantes.

Remarquons d'abord que si f désigne l'application identique d'un espace normé complet F dans lui-même, et si g désigne une application linéaire de F dans F, de norme < 1, non seulement $(f+g)$ est un monomorphisme d'après la proposition 5-2, mais aussi ce monomorphisme transforme F en F. En effet, pour tout $a \in F$, l'équation $f(x)+g(x) = a$ s'écrit aussi $x = a-g(x)$, et puisque l'application $x \to a-g(x)$ est contractante, cette équation a une solution (en vertu du théorème 21-2, chapitre V).

Ce que nous allons faire maintenant va consister à remplacer f par un isomorphisme d'un espace complet E sur un autre F, à remplacer g par une application lipschitzienne de rapport assez petit, puis à « localiser » ces applications f et g.

LEMME 5-5. — *Soit ω un ouvert d'un espace de Banach* F, *et soit g' une application de ω dans* F, *lipschitzienne de rapport $k' < 1$.*

Alors l'image de ω par l'application $\gamma : y \to y+g'(y)$ est ouverte dans F.

Plus précisément, l'image par γ de toute boule fermée $B(b, \rho) \subset \omega$ contient la boule fermée $B\big(\gamma(b), (1-k')\rho\big)$.

DÉMONSTRATION. — Il suffit évidemment de démontrer la seconde partie de l'énoncé.

Pour simplifier les notations, supposons, grâce à une translation de ω (resp. de $\gamma(\omega)$) que $b = O$ (resp. $\gamma(b) = O$).

Nous voulons montrer que pour tout $c \in F$ tel que $\|c\| \leqslant (1-k')\rho$, l'équation $x+g'(x) = c$ a une solution x telle que $\|x\| \leqslant \rho$.

Or cette équation s'écrit $x = c-g'(x)$; l'application $x \longrightarrow c-g'(x)$ est lipschitzienne de rapport $k' < 1$ et applique $B(O, \rho)$ dans elle-même puisque si $\|x\| \leqslant \rho$ on a :

$$\|c-g'(x)\| \leqslant \|c\|+\|g'(x)\| \leqslant (1-k')\rho+k'\rho = \rho .$$

Comme $B(O, \rho)$ est un espace métrique complet, le théorème 21-2 du chapitre V (schéma des approximations successives) montre que l'équation a bien une solution.

LEMME 5-6. — *Soit* A *un espace métrique; soit f une injection de* A *dans un espace de Banach* F, *qui multiplie les distances au moins par un nombre $K > 0$, et telle que $f(A)$ soit ouvert dans* F; *soit g une autre application de* A *dans* F *qui soit lipschitzienne de rapport $k < K$.*

Alors l'image de A *par $(f+g)$ est un ouvert de* F.

Démonstration. — Posons $g' = g \circ f^{-1}$; c'est une application de l'ouvert $\omega = f(A)$ de F dans F ; elle est lipschitzienne de rapport $k' = k/K$, et par hypothèse ce rapport est < 1.

Si l'on désigne par f' l'application identique de F on a :

$$(f+g)(A) = (f+g)(f^{-1}(\omega)) = (f'+g')(\omega).$$

Le lemme 5-5 montre que $(f'+g')(\omega)$ est un ouvert de F, d'où la propriété cherchée.

Théorème 5-7. — *Soient* E, F *deux espaces de Banach, et* f *un isomorphisme de* E *sur* F. *Soient* A *un ouvert de* E, *et* g *une application de* A *dans* F, *lipschitzienne de rapport* k.

Lorsque $k < \|f^{-1}\|^{-1}$, $(f+g)$ *est injective, lipschitzienne ainsi que son inverse, et transforme* A *en un ouvert de* F.

C'est un cas particulier du lemme 5-6 ; en effet, comme f est un isomorphisme de E sur F, $f(A)$ est ouvert dans F, et f multiplie les distances au moins par $K = \|f^{-1}\|^{-1}$.

La proposition 5-4 montre que $(f+g)$, évidemment lipschitzienne, multiplie les distances au moins par $(K-k)$; donc son inverse est lipschitzienne de rapport $(K-k)^{-1}$.

Ce théorème nous sera fort précieux dans l'étude des fonctions continûment différentiables, pour la démonstration des théorèmes concernant les fonctions implicites.

Corollaire 5-8. — *Si* E, F *sont deux espaces de Banach, l'ensemble des isomorphismes de* E *sur* F *est un ouvert (éventuellement vide) de* $\mathscr{L}(E, F)$.

Z Un exemple simple va nous montrer que dans les énoncés 5-5, 5-6, 5-7, le fait que F est complet est essentiel.

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}([0,1], \mathbf{R})$ constitué par les restrictions à $[0,1]$ des polynômes réels ; soit g l'application de F dans lui-même qui, à tout polynôme $x \in F$ associe le polynôme $t \longrightarrow x(t^2)$. On a $\|g\| = 1$; donc pour tout k tel que $0 < k < 1$, kg est lipschitzienne de rapport $k < 1$. L'image de F par l'application $x \longrightarrow x + kg(x)$ est un sous-espace vectoriel de F distinct de F puisqu'il ne contient que des polynômes de degré pair ; il ne contient donc aucun ouvert de F.

6. — Produit d'espaces normés ; applications multilinéaires continues

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille *finie* d'espaces normés sur le même corps $\mathbf{K}$, dont nous noterons uniformément les normes par $\|x\|$; et soit E l'espace vectoriel produit des E_i.

Nous avons vu en 2-*14* que la topologie sur E associée à la famille des semi-écarts $\|x_i\|$ est identique à la topologie produit des topologies des E_i.

Les semi-normes $\sup \|x_i\|$, $\Sigma \|x_i\|$ et $(\Sigma \|x_i\|^2)^{\frac{1}{2}}$ sont équivalentes et chacune d'elles définit sur E la même topologie que la famille des $\|x_i\|$ (voir 2-*16*); ce sont ici des normes sur E puisque les relations $(\|x_i\| = 0)$ entraînent $x = O$.

Continuité d'une application multilinéaire. — Rappelons que si (E_i) désigne une famille finie d'espaces vectoriels, et f une application du produit ΠE_i dans un autre espace vectoriel F, on dit que f est multilinéaire si elle est séparément linéaire par rapport à chacune des variables. Lorsque les E_i et F sont normés, le produit des E_i est aussi normé et on peut chercher à étendre aux applications multilinéaires la proposition 4-*3* caractérisant les applications linéaires continues :

PROPOSITION 6-*1*. — *Soient* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *et* F *des espaces normés et soit* f *une application multilinéaire du produit* E *des* E_i *dans* F ; *les trois énoncés suivants sont équivalents :*

1° f est continue ;

2° f est bornée sur toute partie bornée de E ;

3° Il existe une constante $k \geqslant 0$ telle que, pour tout $x = (x_i) \in E$, on ait :

$$\|f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| \leqslant k\|x_1\| \cdot \|x_2\| \ldots \|x_n\|$$

DÉMONSTRATION. — Nous prendrons sur E la norme $\|x\| = \sup\|x_i\|$.

$1 \Rightarrow 2$. — Si f est continue, la continuité en O entraîne l'existence d'une boule de centre O dans E sur laquelle $\|f(x)\| \leqslant 1$; par homothétie et grâce à la relation importante $f(\lambda x) = \lambda^n f(x)$, on en déduit que f est bornée sur toute boule de centre O, donc aussi sur toute partie bornée de E.

$2 \Rightarrow 3$. — Si f est bornée sur toute partie bornée de E, elle l'est en particulier sur la boule $\|x\| \leqslant 1$; posons alors :

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)\| .$$

Pour tout $x = (x_i)$ tel que $x_i \neq O$ pour tout i, le point $(\|x_i\|^{-1} x_i)$ appartient à la boule unité de E, d'où :

$$\left\| f\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \frac{x_2}{\|x_2\|}, \ldots, \frac{x_n}{\|x_n\|} \right) \right\| \leqslant \|f\|,$$

d'où $$\|f(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \leqslant \|f\| \prod_i \|x_i\| .$$

Lorsque l'un des x_i est nul, cette inégalité est encore vraie puisque ses deux membres sont alors nuls.

3 ⇒ 1. — Pour simplifier les notations, nous n'expliciterons la démonstration que pour $n = 2$.

Supposons donc que $\|f(x_1, x_2)\| \leqslant k\|x_1\|\cdot\|x_2\|$.

Cette relation entraîne évidemment la continuité au point O; pour démontrer la continuité en un point (a_1, a_2), posons

$$x_1 = a_1 + u_1 ; \qquad x_2 = a_2 + u_2 .$$

On a $f((a_1+u_1), (a_2+u_2)) - f(a_1, a_2) = f(a_1, u_2) + f(u_1, a_2) + f(u_1, u_2)$

d'où, si $\|u_1\| \leqslant \varepsilon$ et $\|u_2\| \leqslant \varepsilon$:

$$\|f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)\| \leqslant k(\|a_1\|\varepsilon + \|a_2\|\varepsilon + \varepsilon^2) .$$

Le second membre tend vers 0 avec ε, d'où la continuité cherchée.

L'espace normé $\mathscr{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ **6-*2*.** — Les applications multilinéaires continues du produit E des E_i dans F constituent évidemment un espace vectoriel; on le notera $\mathscr{L}(E_1, \dots, E_n; F)$.

On vérifiera que

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)\| \qquad (\text{où } \|x\| = \sup \|x_i\|)$$

est une norme sur cet espace vectoriel, et que $\|f\|$ est le plus petit nombre $k \geqslant 0$ satisfaisant à l'inégalité de la proposition 6-*1*.

Une démonstration calquée sur celle de la proposition 4-*7* montre que lorsque F est complet, l'espace $\mathscr{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ est aussi complet.

Exemples. — 1° Désignons par E, E′ respectivement un espace normé et son dual topologique.

L'application $(x, l) \longrightarrow l(x)$ de $E \times E'$ dans **K** est une forme bilinéaire sur $E \times E'$; l'inégalité $|l(x)| \leqslant \|l\| \cdot \|x\|$ montre que cette forme bilinéaire est continue et de norme $\leqslant 1$.

2° Plus généralement, soient E, F deux espaces normés; l'application $(x, l) \longrightarrow l(x)$ de $E \times \mathscr{L}(E, F)$ dans F est bilinéaire et de norme $\leqslant 1$.

Isomorphie de $\mathscr{L}(E, F; G)$ ***et*** $\mathscr{L}(E, \mathscr{L}(F, G))$. — Soit $f : (x, y) \longrightarrow f(x, y)$ un élément de $\mathscr{L}(E, F; G)$; pour tout x fixe, l'application $f_x : y \to f(x, y)$ est un élément de $\mathscr{L}(F, G)$ et $\|f_x\| \leqslant \|f\|$ lorsque $\|x\| \leqslant 1$; donc l'application $\hat{f} : x \longrightarrow f_x$, évidemment linéaire, de E dans $\mathscr{L}(F, G)$ est telle que $\|\hat{f}\| \leqslant \|f\|$.

Inversement, soit $g : x \longrightarrow g_x$ un élément de $\mathscr{L}(E, \mathscr{L}(F, G))$; l'applica-

tion $\hat{g}:(x, y) \longrightarrow g_x(y)$ de E×F dans G est bilinéaire, et si $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$, on a :

$$\|g_x\| \leqslant \|g\|, \quad \text{d'où} \quad \|g_x(y)\| \leqslant \|g\|, \quad \text{donc} \quad \|\hat{g}\| \leqslant \|g\|.$$

Or il est clair que $\hat{\hat{f}} = f$ et que $\hat{\hat{g}} = g$; donc l'application linéaire $f \longrightarrow \hat{f}$ de $\mathscr{L}$ (E, F; G) dans $\mathscr{L}\big(\text{E}, \mathscr{L}(\text{F}, \text{G})\big)$ est bijective, et l'on a :

$$\|\hat{f}\| \leqslant \|f\| = \|\hat{\hat{f}}\| \leqslant \|\hat{f}\|, \quad \text{d'où} \quad \|\hat{f}\| = \|f\|; \qquad \text{donc :}$$

PROPOSITION **6**-*3*. — *Si* E, F, G *désignent trois espaces normés quelconques, l'application linéaire* $f \longrightarrow \hat{f}$ *(dite canonique) de* $\mathscr{L}$(E, F; G) *dans* $\mathscr{L}\big(\text{E}, \mathscr{L}(\text{F}, \text{G})\big)$ *est un isomorphisme qui conserve la norme.*

7. — Espaces normés de dimension finie

Nous connaissons déjà un espace normé de dimension n sur $\mathbf{K}$, à savoir $\mathbf{K}^n$ muni des normes équivalentes $\sup|x_i|$, $(\Sigma|x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$, $\Sigma|x_i|$. Nous allons voir que c'est le seul, à une isomorphie près.

LEMME 7-*1*. — *Toute norme p sur $\mathbf{K}^n$ est continue.*

DÉMONSTRATION. — Soit $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$ (a_p a toutes ses coordonnées nulles, sauf la p^{e} qui vaut 1). Pour tout point $x = (x_i)$ de $\mathbf{K}^n$ on a :

$$p(x) = p\left(\sum x_i a_i\right) \leqslant \sum |x_i|\, p(a_i),$$

Donc p est continue au point O; enfin la relation $|p(a+u) - p(a)| \leqslant p(u)$ montre que p est continue en tout point a.

PROPOSITION 7-*2*. — *Toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.*

DÉMONSTRATION. — Comme tout espace vectoriel de dimension n sur $\mathbf{K}$ est vectoriellement isomorphe à $\mathbf{K}^n$, il suffit de raisonner sur $\mathbf{K}^n$.

Soient p_1, p_2 deux normes quelconques sur $\mathbf{K}^n$; d'après le lemme 7-*1*, elles sont continues dans $\mathbf{K}^n$, et comme elles ne s'annulent pas sur l'ensemble $S = \{x : \Sigma|x_i| = 1\}$, les quotients $p_1 p_2^{-1}$ et $p_2 p_1^{-1}$ sont définis et continus sur S; or l'ensemble S est borné et fermé dans $\mathbf{K}^n$, donc compact; ces deux quotients sont donc bornés sur S, donc dans $\mathbf{K}^n$ tout entier, par raison d'homogénéité.

COROLLAIRE 7-3. — *Pour tout espace normé* E *de dimension* n, *et pour toute base* $(b_1, b_2, ..., b_n)$ *de* E, *l'isomorphisme vectoriel* $(x_i) \longrightarrow \sum x_i b_i$ *de* $\mathbf{K}^n$ *sur* E *est bicontinu.*

On peut dire, plus brièvement, que tout espace normé de dimension n est isomorphe à $\mathbf{K}^n$.

COROLLAIRE 7-4. — *Tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé* E *est complet, et donc fermé dans* E.

En effet, $\mathbf{K}$ étant complet, $\mathbf{K}^n$ l'est aussi, donc aussi tout espace normé de dimension finie d'après le corollaire 7-3.

COROLLAIRE 7-5. — *Toute application multilinéaire d'un produit d'espaces normés de dimension finie dans un espace vectoriel topologique* F *quelconque est continue.*

DÉMONSTRATION. — Pour simplifier les notations, bornons-nous au cas d'une application bilinéaire f d'un produit $X \times Y$ dans F. Le corollaire 7-3 montre qu'on peut prendre pour X et Y des espaces $\mathbf{K}^p$ et $\mathbf{K}^q$; si (a_i) et (b_j) désignent les bases canoniques de $\mathbf{K}^p$ et $\mathbf{K}^q$ respectivement, on a :

$$f(x, y) = f(\sum x_i a_i, \sum y_j b_j) = \sum x_i y_j f(a_i, b_j).$$

Pour tous i, j, l'application $(x, y) \longrightarrow x_i y_j$ est continue; il en est donc de même de f, d'après les axiomes des e.v.t.

Caractérisation topologique des espaces normés de dimension finie. — Le corps $\mathbf{K}$ étant localement compact, il en est de même de tout espace $\mathbf{K}^n$, donc aussi de tout espace normé de dimension finie.

Nous allons voir que cet énoncé admet une réciproque, fort importante dans l'étude des équations intégrales.

THÉORÈME 7-6 (de Frédéric Riesz). — *Tout espace normé localement compact est de dimension finie.*

DÉMONSTRATION. — Supposons l'espace normé E localement compact. L'origine O possède alors un voisinage compact V, et comme les boules fermées de centre O et de rayon non nul constituent une base de voisinages de O, l'une d'elles est contenue dans V, donc est compacte. Par homothétie la boule fermée unité B est donc aussi compacte.

Il existe donc un recouvrement fini de B par des boules ouvertes $(x_i + \frac{1}{2}\mathring{B})$, donc aussi par les $(x_i + \frac{1}{2}B)$. Désignons par F l'espace vectoriel engendré par les x_i, et soit n sa dimension. On peut écrire :

$$B \subset \bigcup_i (x_i + \tfrac{1}{2}B) \subset F + \tfrac{1}{2}B. \qquad (1)$$

Montrons que cette relation n'est possible que si $F = E$: Si $F \neq E$, il existe un sous-espace vectoriel G de E, de dimension $(n+1)$, contenant F ; et sur G il existe une forme linéaire non nulle f, qui s'annule sur F. La relation (1) donne, dans G :

$$B \cap G \subset F + \tfrac{1}{2}(B \cap G), \quad \text{d'où} \quad f(B \cap G) \subset \tfrac{1}{2} f(B \cap G). \qquad (2)$$

Or f est continue dans G et d'après 7-4, G est fermé dans E, donc $f(B \cap G)$ est un compact de $\mathbf{K}$; d'après (2) on a $f(B \cap G) \subset (\frac{1}{2})^n f(B \cap G)$, donc ce compact étant contenu dans tout voisinage de 0 est réduit à ce point, c'est-à-dire que $B \cap G \subset F$. Or ceci est impossible puisque F n'est pas, comme $B \cap G$, un voisinage de 0 dans G.

On a donc bien $E = F$, de dimension finie.

Exemple. — L'espace normé $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{K})$ est de dimension infinie; donc sa boule fermée unité n'est pas compacte.

Une vérification immédiate de ce fait consiste à observer que la distance entre deux monômes quelconques de la forme t^{2^n} est $\geqslant \frac{1}{4}$.

Application aux opérateurs compacts. — Soient E, F deux espaces normés ; on dit qu'un élément f de $\mathscr{L}(E, F)$ est *compact* si pour toute partie bornée X de E, $f(X)$ est relativement compact dans F.

Nous allons considérer le cas où f est un *opérateur* (c'est-à-dire que $E = F$) et étudier l'espace vectoriel des valeurs propres x de f associées à un scalaire $\lambda \neq 0$, c'est-à-dire les solutions de $f(x) = \lambda x$.

Théorème 7-7. — *Si f est un opérateur compact, pour tout scalaire $\lambda \neq 0$ l'espace vectoriel E_λ des vecteurs propres associés à λ est de dimension finie.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que, f étant continu, l'ensemble E_λ des solutions de $f(x) - \lambda x = 0$ est fermé.

Soit alors B la boule unité fermée de E ; l'ensemble $B_\lambda = B \cap E_\lambda$ est aussi fermé et comme $f(B_\lambda) = \lambda B_\lambda$, $f(B_\lambda)$ est fermé. De plus, f étant un opérateur compact, $f(B_\lambda)$ est, comme $f(B)$, relativement compact ; et comme il est fermé, il est compact.

Enfin comme $B_\lambda = \lambda^{-1} f(B)$, B_λ est aussi compact, donc l'espace normé E_λ est localement compact, donc de dimension finie.

Nous ne ferons pas ici une théorie des opérateurs compacts. Nous donnerons simplement un exemple d'opérateur compact ; pour d'autres exemples, voir exercices 50-55.

EXEMPLE 7-8. — Désignons par E l'espace $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{C})$, par B sa boule unité, et soit K une application continue de $[0, 1]^2$ dans $\mathbf{C}$. Pour tout $x \in$ E, posons :

$$f(x)(t) = \int_0^1 \mathrm{K}(t, u)\, x(u)\, du .$$

L'inégalité

$$\left| \int_0^1 \big(\mathrm{K}(a, u) - \mathrm{K}(b, u)\big)\, x(u)\, du \right| \leqslant \|x\| \int_0^1 |\mathrm{K}(a, u) - \mathrm{K}(b, u)|\, du ,$$

jointe à la continuité uniforme de K, montre que, non seulement $f(x) \in$ E, mais aussi la famille des $f(x)$ où $x \in$ B est équicontinue ; comme elle est aussi bornée puisque $\|f(x)\| \leqslant \|\mathrm{K}\|$, elle est compacte d'après le théorème d'Ascoli. Autrement dit l'opérateur continu f de E est compact.

III. — FAMILLES SOMMABLES ; SÉRIES ; PRODUITS INFINIS ; ALGÈBRES NORMÉES

Lorsqu'on cherche à définir la somme d'une famille infinie de nombres réels, on est conduit à utiliser une notion de limite, donc aussi la topologie de **R**.

Mais une fois précisée cette topologie, la définition de la somme n'est pas encore unique. La première définition utilisée, et qui fut longtemps la seule, suppose les nombres à additionner rangés dans une suite a_0, a_1, ... ; la convergence de cette « série » se définit alors par l'intermédiaire des sommes finies $s_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$; lorsque la suite s_n converge vers un nombre s, on dit que la série converge et a pour somme s.

Le choix de cette définition s'imposait lorsqu'il s'agissait de sommer des familles infinies munies d'un ordre naturel, telles que les familles (k^n), (n^{-2}), $\big((-1)^n n^{-1}\big)$; on la conserva ensuite par habitude même lorsqu'on commença à considérer des suites (a_n) quelconques, ou des « séries multiples » dont l'ensemble des indices n'était pas muni d'un ordre naturel.

Mais cette définition ne faisait jouer presque aucun rôle aux propriétés algébriques de l'addition telles que commutativité et associativité ; aussi lorsque ces propriétés algébriques furent mieux dégagées, lorsque aussi on commença à utiliser des espaces vectoriels topologiques plus généraux, le besoin se fit-il sentir d'une définition de la sommabilité d'une famille $(a_i)_{i \in \mathrm{I}}$ qui soit à la fois valable dans un cadre plus général, et indépendante d'un ordre sur l'ensemble I des indices.

C'est une telle définition que nous allons étudier ici.

8. — Familles sommables de nombres réels

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille, finie ou infinie, de nombres réels; désignons par $\mathscr{F}$ l'ensemble, ordonné par inclusion, des parties finies de I; et pour tout $J \in \mathscr{F}$ désignons par A_J la somme finie $\sum_{i\in J} a_i$.

Nous dirons, en termes pour l'instant très vagues, que la famille donnée est sommable et a pour somme A si A_J tend vers A lorsque J devient de plus en plus grand.

Une première façon de préciser cette idée vague consiste à remarquer que, l'ensemble ordonné $\mathscr{F}$ étant filtrant croissant, les parties de $\mathscr{F}$ de la forme $\{J : J \supset J_0\}$ constituent une base de filtre $\mathscr{B}$. On dit alors que la famille (a_i) a pour somme A si $A = \lim_{\mathscr{B}} A_J$.

Mais pour éviter le recours aux bases de filtre, nous donnerons de la sommabilité une définition équivalente plus directe :

Définition 8-*1*. — ON DIT QU'UNE FAMILLE $(a_i)_{i\in I}$ DE NOMBRES RÉELS EST *SOMMABLE* S'IL EXISTE UN NOMBRE RÉEL A POSSÉDANT LA PROPRIÉTÉ SUIVANTE :

POUR TOUT NOMBRE $\varepsilon > 0$, IL EXISTE $J_0 \in \mathscr{F}$ TEL QUE, POUR TOUT $J \in \mathscr{F}$ CONTENANT J_0, ON AIT :

$$|A - A_J| \leqslant \varepsilon .$$

Montrons tout de suite que si un tel nombre A existe, il est unique. En effet soient A et A′ deux tels nombres ; les relations :

$$|A - A_J| \leqslant \varepsilon \text{ pour } J_0 \subset J; \qquad |A' - A_J| \leqslant \varepsilon \text{ pour } J'_0 \subset J$$

sont vérifiées simultanément si $J = J_0 \cup J'_0$; on en déduit :

$$|A - A'| \leqslant |A - A_J| + |A' - A_J| \leqslant 2\varepsilon .$$

Comme ε est arbitraire, on a bien $A = A'$.

On peut maintenant compléter ainsi la définition 8-1 :

LE NOMBRE A DONT ON VIENT DE MONTRER L'UNICITÉ S'APPELLE LA *SOMME* DE LA FAMILLE $(a_i)_{i\in I}$ ET ON LE NOTE :

$\sum_{i\in I} a_i$, OU $\sum_i a_i$, OU ENCORE $\sum a_i$ LORSQUE AUCUNE CONFUSION SUR I N'EST POSSIBLE.

LEMME 8-*2*. — *Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles sommables de nombres réels sur le même ensemble d'indices, de sommes respectives A et B.*

La famille $(c_i)_{i\in I}$ où $c_i = a_i + b_i$ est sommable et de somme $A + B$.

DÉMONSTRATION. — Soit $\varepsilon > 0$; il lui correspond J_0 et $J'_0 \in \mathscr{F}$ tels que :

$$|A - A_J| \leqslant \varepsilon \text{ pour } J_0 \subset J; \qquad |B - B_J| \leqslant \varepsilon \text{ pour } J'_0 \subset J.$$

Ces deux inégalités sont vraies simultanément si $J_0 \cup J'_0 \subset J$, d'où alors :

$$|A + B - (A_J + B_J)| \leqslant |A - A_J| + |B - B_J| \leqslant 2\varepsilon$$

ou encore, en posant $C = A + B$:

$$|C - C_J| \leqslant 2\varepsilon \text{ pour tout J tel que } J_0 \cup J'_0 \subset J,$$

ce qui montre que la famille (c_i) est sommable et de somme C.

PROPOSITION **8**-*3*. — *Soit* I *un ensemble d'indices. L'ensemble des familles sommables de nombres réels dont l'ensemble des indices est* I, *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$, *et l'application* $(a_i) \longrightarrow \sum a_i$ *est une forme linéaire sur cet espace.*

C'est immédiat, à partir du lemme 8-*10* si l'on remarque également que lorsque la famille (a_i) est sommable et de somme A, la famille (λa_i) est sommable et de somme λA.

Comme $\Sigma a_i \geqslant 0$ lorsque chaque a_i est $\geqslant 0$, on a aussi $\Sigma a_i \leqslant \Sigma b_i$ lorsque $a_i \leqslant b_i$ pour tout i.

REMARQUE. — Il est parfois utile de remarquer que si I′ est une partie de I telle que $a_i = 0$ pour tout $i \notin I'$, les familles $(a_i)_{i \in I}$ et $(a_i)_{i \in I'}$ sont simultanément sommables (ou non sommables) et ont des sommes égales.

Familles de nombres positifs. — La définition 8-*1* ne sera utilisable que lorsque nous disposerons de critères commodes de sommabilité; c'est l'étude des familles de nombres positifs qui va nous les fournir.

PROPOSITION **8**-*4*. — *Dire qu'une famille* $(a_i)_{i \in I}$ *de nombres* $\geqslant 0$ *est sommable équivaut à dire que l'ensemble des sommes finies* A_K *est majoré; on a alors :*

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup_K (A_K).$$

DÉMONSTRATION. — 1° Supposons la famille (a_i) sommable; avec les notations de la définition 8-*1*, on a :

$$|A - A_J| \leqslant \varepsilon \text{ d'où } A_J \leqslant A + \varepsilon \text{ pour tout J contenant } J_0.$$

Comme les a_i sont $\geqslant 0$, on a pour tout $K \in \mathscr{F}$.

$$A_K \leqslant A_{K \cup J_0} \leqslant A + \varepsilon.$$

Donc l'ensemble des A_K est majoré par $A + \varepsilon$ (et même par A puisque ε est arbitraire).

2° Inversement supposons l'ensemble des A_K majoré, et soit A sa borne supérieure. D'après la définition de la borne supérieure, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $J_0 \in \mathcal{F}$ tel que

$$A - \varepsilon \leqslant A_{J_0} \leqslant A .$$

Pour tout $J \in \mathcal{F}$ tel que $J_0 \subset J$ on a donc :

$$A - \varepsilon \leqslant A_{J_0} \leqslant A_J \leqslant A \qquad \text{d'où } |A - A_J| \leqslant \varepsilon .$$

Cette relation montre que la famille (a_i) est sommable et a pour somme A.

EXEMPLE. — Soit $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille de sous-intervalles ouverts de l'intervalle [0, 1], disjoints deux à deux; et soit a_i la longueur de α_i. Pour tout K fini dans I, on a évidemment $A_K \leqslant 1$; donc la famille (a_i) est sommable et de somme $\leqslant 1$.

COROLLAIRE 8-5. — *Toute sous-famille d'une famille sommable de nombres $\geqslant 0$ est sommable.*

En effet, si $I' \subset I$, l'ensemble des sommes finies A_J telles que $J \subset I$ contient l'ensemble analogue relatif à I'; si le premier est majoré, le second l'est donc aussi.

COROLLAIRE 8-6 *(principe de comparaison). — Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de nombres $\geqslant 0$ sur le même ensemble d'indices, et telles que $a_i \leqslant b_i$ pour tout $i \in I$.*

Si la famille (b_i) est sommable, la famille (a_i) l'est aussi et leurs sommes A, B vérifient la relation $A \leqslant B$.

DÉMONSTRATION. — Soit B la somme de la famille (b_i); pour tout $J \in \mathcal{F}$ on a :

$$A_J \leqslant B_J \leqslant B .$$

Donc la proposition 8-2 montre que la famille (a_i) est sommable et de somme $A \leqslant B$.

Notons que ces conclusions s'étendent au cas où il existe une constante $k \geqslant 0$ telle que $a_i \leqslant k b_i$ pour tout i; on a alors $A \leqslant kB$.

EXEMPLES. — Ce principe de comparaison est un outil puissant qui, à partir de quelques familles sommables de base, permet d'en trouver d'autres :

8-7. — Les familles de base les plus utilisées ont pour ensemble d'indices $\mathbf{N}$ ou $\mathbf{N}^*$; ce sont donc des suites; citons les plus utiles :

La suite géométrique (k^n), sommable lorsque $0 \leqslant k < 1$.

La suite $(n^{-\alpha})$, sommable lorsque $\alpha > 1$.

Un procédé commode de fabrication de suites sommables (a_n) de nombres $\geqslant 0$ consiste à partir d'une fonction numérique décroissante f sur $\mathbf{N}$, telle que $\lim_{n \to \infty} f(n) = 0$, et à poser :

$$a_n = f(n) - f(n+1)\,.$$

La relation $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = f(1) - f(n+1) \leqslant f(1)$ montre que la famille (a_n) est sommable et de somme $f(1)$.

Par exemple, en prenant successivement $f(n) = k^n$ et $f(n) = n^{-p}$ (où p est > 0), on retrouve la sommabilité des suites mentionnées plus haut.

L'intégration des fonctions décroissantes définies sur $[0, \infty[$ constitue un autre procédé de fabrication de suites décroissantes sommables; nous l'examinerons lors de l'étude de l'intégration sous le titre « comparaison des séries et des intégrales ».

8-*8*. — Rappelons deux conditions suffisantes classiques de sommabilité des suites positives, déduites de la comparaison avec une suite k^n :

a) Si $\limsup (a_{n+1}/a_n) < 1$, la suite (a_n) est sommable; en effet il existe alors un nombre positif $k < 1$ et un entier n_0 tels que, pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $a_{n+1}/a_n \leqslant k$.

On en déduit $a_{n_0+p} \leqslant a_{n_0} k^p$, d'où la sommabilité.

Si $\limsup (a_{n+1}/a_n) \geqslant 1$, on ne peut pas conclure; par exemple si $a_n = 2^{-n}$ ou 3^{-n} suivant que n est pair ou impair, cette limite supérieure vaut $+\infty$ et cependant la suite (a_n) est sommable.

b) Si $\limsup (a_n)^{1/n} < 1$, la suite est sommable, car à partir d'un certain rang on a :

$$a_n < k^n\,, \qquad \text{où } k < 1\,.$$

Si cette limite supérieure vaut 1 on ne peut pas conclure (considérer le cas où $a_n = n^{-\alpha}$); si elle est > 1, $\limsup a_n = +\infty$, donc la suite n'est pas sommable.

8-*9*. — Les familles dont l'ensemble des indices est $\mathbf{N}^2$, $\mathbf{N}^3$, ou plus généralement $\mathbf{N}^n$, ou une partie assez simple de $\mathbf{N}^n$ sont appelées parfois, d'ailleurs improprement puisqu'il n'existe sur ces ensembles d'indices aucun ordre naturel, *séries doubles, triples ou n-uples.*

Ici encore la théorie de l'intégration permettra d'établir la sommabilité de nombreuses « séries multiples ».

Par exemple la série n-uple de terme général $(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)^{-\alpha}$ (où $p_i \in \mathbf{N}^*$) est sommable si $\alpha > n$, et ne l'est pas si $\alpha \leqslant n$.

La série double de terme général $(a^m + b^n)^{-1}$ (où $a > 1$ et $b > 1$) est sommable.

Limite de familles de nombres positifs. — PROPOSITION **8**-*10*. — *Soit $(a_i(\lambda))_{i \in I}$ une famille sommable de nombres positifs, dépendant d'un paramètre $\lambda \in L$, et soit $\mathscr{B}$ une base de filtre sur L telle que, pour tout $i \in I$, $a_i(\lambda)$ ait une limite a_i suivant $\mathscr{B}$.*

S'il existe une constante k telle que, pour tout $\lambda \in L$ on ait $\sum_i a_i(\lambda) \leqslant k$, la famille (a_i) est sommable, et $\sum_i a_i \leqslant k$.

DÉMONSTRATION. — Pour tout J fini $\subset$ I, on a :

$$\sum_{i \in J} a_i(\lambda) \leqslant k .$$

Laissons J fixe et passons à la limite suivant $\mathscr{B}$ dans cette relation; on obtient :

$$\sum_{i \in J} a_i \leqslant k , \qquad \text{d'où aussi } \sum_{i \in I} a_i \leqslant k .$$

Z Voici un exemple montrant que les sommes $s_\lambda = \sum_i a_i(\lambda)$ peuvent ne pas converger (suivant $\mathscr{B}$) vers $s = \sum_i a_i$:

On prend $I = L = \mathbf{N}$ et on pose :

$$a_i(n) = 0 \text{ si } i \neq n; \qquad a_n(n) = 1 .$$

On vérifiera que :

$$a_i = \lim_{n \to \infty} a_i(n) = 0 ,$$

que

$$s_n = 1 \quad \text{et} \quad s = 0;$$

donc

$$s \neq \lim_{n \to \infty} s_n .$$

On trouvera dans l'exercice 83 une condition suffisante pour que

$$s = \lim_{\mathscr{B}} s_\lambda .$$

Application à l'espace l_I^p. — Soit I un ensemble d'indices quelconque, fini ou infini, et soit p un nombre réel $\geqslant 1$.

Comme dans l'exemple 3-*5* on montre que la partie de $\mathscr{F}(I, \mathbf{K})$ constituée par les familles $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbf{K}$ telles que $\sum |x_i|^p < \infty$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbf{K})$, et que $\|x\| = (\sum |x_i|^p)^{1/p}$ est une norme sur ce sous-espace.

On désigne par l_I^p cet espace vectoriel (réel ou complexe) muni de cette norme; lorsque $I = \mathbf{N}$ on retrouve l'espace l^p de l'exemple 3-*5*.

PROPOSITION **8**-*11*. — *Quel que soit I, l'espace l_I^p est complet.*

DÉMONSTRATION. — Soit $(x(n))$ une suite de Cauchy de l_I^p; pour tout $i \in I$, la relation

$$|x_i(r) - x_i(s)| \leqslant \|x(r) - x(s)\|$$

montre que la suite des nombres $x_i(n)$ est une suite de Cauchy de $\mathbf{K}$; désignons par x_i sa limite.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $(r, s \geqslant n_0)$ entraîne

$$\sum_{i \in I} |x_i(r) - x_i(s)|^p \leqslant \varepsilon;$$

si l'on fait tendre s vers $+\infty$, la proposition 8-*10* montre que l'on a aussi :

$$\sum_{i \in I} |x_i(r) - x_i|^p \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Ceci montre d'abord que la famille $\big(x_i(r) - x_i\big)_{i \in I}$ est un élément de l^p_I; comme c'est vrai aussi de la famille $\big(x_i(r)\big)$ ce l'est également de la famille $x = (x_i)$.

La relation (1) s'écrit alors $\|x(r) - x\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $r \geqslant n_0$, ce qui exprime la convergence de la suite $\big(x(n)\big)$ vers x.

Familles de nombres réels. — Pour étudier une famille de nombres réels, on va la faire apparaître comme différence de deux familles positives.

Définition 8-*12*. — ON DIT QU'UNE FAMILLE (a_i) DE NOMBRES RÉELS EST *ABSOLUMENT SOMMABLE* SI LA FAMILLE $(|a_i|)$ DE LEURS VALEURS ABSOLUES EST SOMMABLE.

Dans cette définition, le mot *absolument* ne signifie nullement que la famille (a_i) est sommable dans l'absolu, ce qui n'aurait d'ailleurs aucun sens; il rappelle simplement que la *valeur absolue* des a_i intervient dans la définition.

PROPOSITION **8-*13*.** — *Soit (a_i) une famille de nombres réels; les trois énoncés suivants sont équivalents :*

1° Cette famille est absolument sommable;

2° Cette famille est sommable;

3° L'ensemble des sommes finies A_K est borné.

DÉMONSTRATION. — 1 ⇒ 2. — La famille des $|a_i|$ majore chacune des familles positives (a_i^+) et (a_i^-); donc si elle est sommable, le principe de comparaison montre que les familles (a_i^+) et (a_i^-) le sont aussi; donc d'après la proposition 8-*3*, la famille (a_i) qui est leur différence est aussi sommable.

2 ⇒ 3. — Si la famille (a_i) est sommable, il existe $J_0 \in \mathscr{F}$ tel que :

$$|A - A_J| \leqslant 1 \text{ pour tout J fini contenant } J_0.$$

Or pour tout $K \in \mathscr{F}$ on a :

$$|A_{K \cup J_0} - A_K| \leqslant \sum_{i \in J_0} |a_i|, \text{ quantité qu'on notera } \lambda_0.$$

Donc pour $J = K \cup J_0$, la comparaison de ces inégalités donne

$$|A - A_K| \leqslant 1 + \lambda_0.$$

Donc l'ensemble des A_K est borné.

3 ⇒ 1. — L'hypothèse entraîne l'existence de deux nombres positifs k_1, k_2 tels que $A_K \in [-k_1, k_2]$ pour tout $K \in \mathscr{F}$.

Pour tout $K \in \mathscr{F}$, la somme des $|a_i|$ tels que $i \in K$ et $a_i \geqslant 0$ appartient à $[0, k_2]$, et la somme des $|a_i|$ tels que $i \in K$ et $a_i \leqslant 0$ appartient à $[0, k_1]$; donc la somme des $|a_i|$ tels que $i \in K$ est $\leqslant k_1 + k_2$.

Ces sommes sont donc majorées ; donc la famille des a_i est absolument sommable.

COROLLAIRE 8-*14*. — *Toute sous-famille d'une famille sommable de nombres réels est sommable.*

En effet, si la famille $(a_\iota)_{\iota \in I}$ est sommable, la famille $(|a_\iota|)_{\iota \in I}$ l'est aussi, donc aussi la sous-famille $(|a_\iota|)_{\iota \in I'}$, donc finalement la sous-famille $(a_\iota)_{\iota \in I'}$.

Z L'équivalence qu'on vient d'établir entre sommabilité et absolue sommabilité n'a pas d'analogue dans la théorie des séries; rappelons par exemple que la série alternée de terme général $(-1)^n n^{-1}$ est convergente bien que la série de terme général n^{-1} soit divergente.

Nous reviendrons plus loin sur la comparaison des séries et des familles sommables.

9. — Familles sommables dans les groupes topologiques et les espaces normés

De nombreux résultats du paragraphe précédent reposent uniquement sur l'existence d'une structure de groupe et d'une topologie séparée sur **R**; aussi peut-on s'attendre à ce que la théorie qu'on a esquissée soit valable dans tout groupe topologique commutatif et séparé. Nous insisterons ici surtout sur le cas des espaces normés, mais il est intéressant, ne serait-ce qu'en vue des familles multipliables, de donner les définitions dans le cadre des groupes topologiques.

Nous continuerons à utiliser les notations $\mathscr{F}$, A_J introduites au paragraphe précédent.

Définition 9-*1*. — SOIT G UN GROUPE TOPOLOGIQUE COMMUTATIF ET SÉPARÉ, NOTÉ ADDITIVEMENT; ET SOIT $(a_\iota)_{\iota \in I}$ UNE FAMILLE D'ÉLÉMENTS DE G.

ON DIT QUE CETTE FAMILLE EST *SOMMABLE* S'IL EXISTE UN ÉLÉMENT A DE G POSSÉDANT LA PROPRIÉTÉ SUIVANTE :

POUR TOUT VOISINAGE V DE O, IL EXISTE $J_0 \in \mathscr{F}$ TEL QUE POUR TOUT $J \in \mathscr{F}$ CONTENANT J_0 ON AIT :

$$A - A_J \in V.$$

LORSQU'UN TEL ÉLÉMENT EXISTE, IL EST UNIQUE; ON L'APPELLE *SOMME* DE LA FAMILLE ET ON LE NOTE :

$$\sum_{\iota \in I} a_\iota, \quad \text{ou} \quad \sum_\iota a_\iota, \quad \text{ou} \quad \sum a_\iota.$$

Démontrons qu'effectivement A est unique lorsqu'il existe. Il suffit de modifier un peu la démonstration donnée après la définition 8-*1* :

Pour tout voisinage U de O, il existe un voisinage symétrique V de O tel que $V+V \subset U$.

Des relations $A-A_J \in V$ et $A'-A_J \in V$ on tire

$$A-A' \in V+V, \qquad \text{d'où } A-A' \in U.$$

L'élément $(A-A')$ appartient à tout voisinage de O; comme G est séparé on a donc $A-A' = O$, ou $A = A'$.

REMARQUES. — 1° Lorsque l'opération de G est notée multiplicativement, on dit de préférence que la famille (a_i) est *multipliable* et a pour produit $A = \Pi a_i$.

C'est le cas par exemple pour les groupes topologiques **R*** et **C***.

2° Lorsque I est fini, la famille (a_i) est toujours sommable et sa somme est égale à la somme au sens ordinaire.

3° Si I′ désigne une partie de I telle que $a_i = 0$ pour tout $i \notin I'$, les familles $(a_\iota)_{\iota \in I}$ et $(a_\iota)_{\iota \in I'}$ sont simultanément sommables (ou non sommables) et ont des sommes égales.

PROPOSITION 9-*2*. — *Soient $(a_\iota)_{\iota \in I}$ et $(b_\iota)_{\iota \in I}$ deux familles sommables d'éléments de G sur le même ensemble d'indices I; et soient A et B leurs sommes.*

La famille $(c_\iota)_{\iota \in I}$, où $c_\iota = a_\iota + b_\iota$ est sommable et de somme $A+B$.

La démonstration est une adaptation de celle du lemme 8-*2*.

PROPOSITION 9-*3*. — *Soient G, G′ deux groupes topologiques commutatifs et séparés, et soit φ un homomorphisme continu de G dans G′.*

Si (a_ι) est une famille sommable dans G, de somme A, la famille (a'_ι) où $a'_\iota = \varphi(a_\iota)$ est sommable dans G′ et de somme $A' = \varphi(A)$.

DÉMONSTRATION. — Pour tout voisinage V′ de O dans G′, posons $V = \varphi^{-1}(V')$; la relation :

$$A - A_J \in V \qquad \text{lorsque } J_0 \subset J$$

entraîne

$$\varphi(A) - \varphi(A_J) \in \varphi(V) \quad \text{ou encore } A' - A'_J \in V'.$$

Autrement dit la famille (a'_ι) a pour somme A′.

Critère de Cauchy. — **Définition 9-*4*.** — ON DIT QU'UNE *FAMILLE* (a_ι) DANS G SATISFAIT AU *CRITÈRE DE CAUCHY* SI, POUR TOUT VOISINAGE V DE O, IL EXISTE $J_0 \in \mathscr{F}$ TEL QUE POUR TOUT $K \in \mathscr{F}$ DISJOINT DE J_0 ON AIT $A_K \in V$.

Autrement dit, après qu'on ait retiré de la famille un nombre fini d'éléments « trop gros », toutes les sommes finies sont petites.

Désignons maintenant par $\mathscr{A}(J_0)$ l'ensemble des A_J pour lesquels $J_0 \subset J$.

PROPOSITION 9-5. — *Dire que la famille (a_i) satisfait au critère de Cauchy équivaut à dire que pour tout voisinage* V *de* O, *il existe un $J_o \in \mathscr{F}$ et un translaté $a+V$ de* V *tel que $\mathscr{A}(J_o) \subset a+V$.*

DÉMONSTRATION. — 1° Supposons que (a_i) satisfasse au critère de Cauchy; tout J contenant J_0 est de la forme $J_0 \cup K$, où K est disjoint de J_0; donc $A_J = A_{J_0} + A_K$.

De la relation $A_K \in V$ résulte donc :

$$A_J \in A_{J_0} + V, \qquad \text{d'où } \mathscr{A}(J_0) \subset A_{J_0} + V.$$

2° V étant donné, il existe un voisinage symétrique U de O tel que $U+U \subset V$.

Si par hypothèse il existe $J_0 \in \mathscr{F}$ et $a \in G$ tel que $\mathscr{A}(J_0) \subset a+U$, on a pour tout K disjoint de J_0 :

$$A_{J_0} \in a+U; \quad A_{J_0} + A_K \in a+U, \qquad \text{d'où } A_K \in U+U \subset V.$$

COROLLAIRE 9-6. — *Toute famille sommable satisfait au critère de Cauchy.*

En effet la condition $\mathscr{A}(J_0) \subset a+V$ se vérifie en prenant pour a la somme A de la famille, et en utilisant la définition 9-*1*.

Z La réciproque de ce corollaire est fausse en général. Mais nous verrons qu'elle est vraie dans les espaces normés complets.

PROPOSITION 9-7. — *Toute sous-famille d'une famille satisfaisant au critère de Cauchy y satisfait aussi.*

En effet, si ces familles ont pour ensembles d'indices I et I′, où $I' \subset I$, il suffit dans l'énoncé 9-*4* de prendre pour ensemble J_0 relatif à la sous-famille, l'ensemble $I' \cap J_0$.

PROPOSITION 9-8. — *Soit (a_i) une famille satisfaisant au critère de Cauchy. Pour tout voisinage* V *de* O, *on a :*

$a_i \in V$ *sauf pour un nombre fini d'indices i.*

Il suffit pour le voir d'appliquer le critère de Cauchy aux ensembles K de la forme $\{i\}$, où $i \notin J_0$.

COROLLAIRE 9-9. — *Si le groupe* G *est tel que* O *ait une base dénombrable de voisinages, et si la famille (a_i) satisfait au critère de Cauchy, l'ensemble des indices i tels que $a_i \neq O$ est fini ou dénombrable.*

En effet, soit (V_n) une base de voisinages de O; pour tout n, l'ensemble I_n des i tels que $a_i \notin V_n$ est fini; comme l'ensemble des i tels que $a_i \neq O$ n'est autre que la réunion des I_n, cet ensemble est fini ou dénombrable.

Z Ce corollaire pourrait laisser croire que l'étude des familles sommables dans les groupes usuels, en particulier dans les espaces normés, se ramène à l'étude des familles dont l'ensemble des indices est dénombrable, c'est-à-dire encore à l'étude des suites (a_n).

Il n'en est rien pour deux raisons : D'une part l'introduction artificielle d'un ordre sur l'ensemble des indices risque de masquer les propriétés de commutativité et d'associativité de la somme; d'autre part il peut arriver que l'on ait à étudier *toutes* les familles sommables sur un ensemble d'indices non dénombrable donné I.

***Commutativité* 9-*10*.** — Comme la définition de la sommabilité d'une famille $(a_i)_{i \in I}$ ne fait intervenir aucune structure d'ordre sur I, on est en droit de dire, en un sens vague, que cette notion est commutative. Cette affirmation peut se préciser de la façon suivante : Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in I'}$ deux familles d'éléments de G; s'il existe une bijection φ de I sur I′ telle que $b_{\varphi(i)} = a_i$ pour tout i, la sommabilité d'une des familles entraîne celle de l'autre, et leurs sommes sont égales.

***Associativité*.** — L'associativité est plus cachée, et consiste en la proposition suivante :

PROPOSITION 9-*11*. — *Soit* $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ *une partition quelconque d'un ensemble d'indices* I, *et soit* $(a_i)_{i \in I}$ *une famille d'éléments du groupe* G *indexée par* I.

Si la famille $(a_i)_{i \in I}$ *est sommable ainsi que chacune des sous-familles* $(a_i)_{i \in I_\lambda}$, *et si l'on désigne leurs sommes par* A *et* s_λ *respectivement, la famille* $(s_\lambda)_{\lambda \in L}$ *est sommable et a pour somme* A.

DÉMONSTRATION. — Reprenons la notation $\mathscr{A}(J_0)$ utilisée dans la proposition 9-*5*; et de façon analogue, pour toute partie finie M_0 de L, désignons par $\mathscr{L}(M_0)$ l'ensemble des sommes finies $\sum_{\lambda \in M} s_\lambda$, où $M_0 \subset M$.

Pour un J_0 donné, si l'on note M_0 l'ensemble fini des λ tels que $J_0 \cap I_\lambda \neq \phi$, toute somme $\sum_{\lambda \in M} s_\lambda$ pour laquelle $M_0 \subset M$ est limite de sommes A_J où $J_0 \subset J$; il en résulte :

$$\mathscr{L}(M_0) \subset \overline{\mathscr{A}(J_0)}, \qquad \text{d'où aussi } \overline{\mathscr{L}(M_0)} \subset \overline{\mathscr{A}(J_0)}.$$

Pour tout voisinage V de O, il existe un J_0 tel que

$$\mathscr{A}(J_0) \subset A + V;$$

donc si V est fermé on a aussi :

$$\overline{\mathscr{A}(J_0)} \subset A + V, \qquad \text{d'où } \overline{\mathscr{L}(M_0)} \subset A + V.$$

Comme les voisinages fermés de O constituent une base de voisinages de O (voir exercice 81), cette relation montre que la famille des s_λ est sommable et de somme A.

EXEMPLE. — Soit $(a_{p,q})$ une suite double sommable de nombres réels; toute sous-famille est alors sommable (corollaire 8-14) et l'on a :

$$\sum_{p,q} a_{p,q} = \sum_p \left(\sum_q a_{p,q}\right) = \sum_q \left(\sum_p a_{p,q}\right).$$

Z Il est inexact que si chacune des sous-familles $(a_\iota)_{\iota\in I_\lambda}$ est sommable et la famille des s_λ sommable, la famille $(a_\iota)_{\iota\in I}$ soit toujours sommable. Pour le voir il suffit de prendre L infini et chacune des sous-familles réduite à deux éléments, l'un valant 1, l'autre -1; chaque s_λ vaut 0, donc la famille des s_λ est sommable, mais la famille des a_ι ne l'est pas.

Par contre voici deux cas importants où cet énoncé devient exact :

9-*12*. — L est fini. — La famille $(a_\iota)_{\iota\in I}$ est alors la somme finie des familles $(a_\iota^\lambda)_{\iota\in I}$ ainsi définies :

$$a_\iota^\lambda = a_\iota \quad \text{si } \iota \in I_\lambda; \qquad a_\iota^\lambda = O \quad \text{si } \iota \notin I_\lambda.$$

Or si l'une des deux familles $(a_\iota^\lambda)_{\iota\in I}$ et $(a_\iota)_{\iota\in I_\lambda}$ est sommable, l'autre l'est aussi et elles ont même somme; d'où le résultat cherché d'après la proposition 9-*2*.

9-*13*. — Les a_ι sont des nombres $\geqslant 0$. — Commençons par étendre un peu la notion de somme : On appellera somme d'une famille $(a_\iota)_{\iota\in I}$ d'éléments de $\overline{\mathbf{R}}_+ = [0, +\infty]$ la borne supérieure, finie ou infinie, des sommes des sous-familles finies d'éléments a_ι.

Soit alors $(I_\lambda)_{\lambda\in L}$ une partition de I; montrons que l'on a encore, pour ces sommes généralisées, la relation :

$$\sum_{\iota\in I} a_\iota = \sum_\lambda s_\lambda, \qquad \text{où } s_\lambda = \sum_{\iota\in I_\lambda} a_\iota.$$

On a d'abord $\sum_\iota a_\iota \geqslant$ (toute somme finie d'éléments s_λ), grâce à un principe de comparaison évident; d'où le signe $\geqslant$ dans la relation cherchée; le signe $\leqslant$ résulte de ce que toute somme finie d'éléments a_ι est majorée par une somme finie d'éléments s_λ.

En particulier, si chacune des sommes s_λ est finie et si $\sum_\lambda s_\lambda$ est finie, il en est de même de $\sum_\iota a_\iota$, d'où le résultat cherché, d'après la proposition 8-*2*.

EXEMPLE 9-*14*. — Soient $(a_\iota)_{\iota\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles sommables de nombres réels; les familles $(|a_\iota|)$ et $(|b_j|)$ sont alors sommables. La famille

des $|a_i b_j|$, dont l'ensemble des indices est $I \times J$ admet une partition en sous-familles indexées par les $i \times J$; or on a, d'après 9-*13*,

$$\sum_{i,j} |a_i b_j| = \sum_i \Big(\sum_j |a_i b_j|\Big) = \sum_i \Big(|a_i| \sum_j |b_j|\Big) = \Big(\sum_i |a_i|\Big)\Big(\sum_j |b_j|\Big).$$

Donc la famille des $(a_i b_j)$ est absolument sommable, donc aussi sommable ; la proposition 9-*11* permet donc d'écrire :

$$\sum_{i,j} a_i b_j = \sum_i \Big(\sum_j a_i b_j\Big) = \sum_i \Big(a_i \sum_j b_j\Big) = \Big(\sum_i a_i\Big)\Big(\sum_j b_j\Big).$$

En résumé, la famille $(a_i b_j)$ qu'on appelle *produit des familles* (a_i), (b_j) est sommable et sa somme est le produit de leurs sommes.

Sommabilité dans les espaces normés. — L'existence d'une norme va nous permettre de retrouver une partie des énoncés étudiés dans le cas de **R**.

THÉORÈME 9-*15*. — *Dans un espace normé* complet E, *toute famille d'éléments de* E *qui satisfait au critère de Cauchy est sommable.*

DÉMONSTRATION. — Supposons que la famille $(a_i)_{i \in I}$ satisfasse au critère de Cauchy ; pour tout entier $n > 0$, il existe donc J_n fini $\subset I$ tel que (avec les notations de 9-5) le diamètre de $\mathscr{A}(J_n)$ soit $< n^{-1}$; *a fortiori* il en est de même pour $\mathscr{A}(J'_n)$, où $J'_n = J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_n$. De plus la suite des fermés $\overline{\mathscr{A}(J'_n)}$ est décroissante et E est complet, donc d'après 20-*6*, ces fermés ont un point commun unique A. La boule $B(A, n^{-1})$ contient $\mathscr{A}(J'_n)$, donc la famille (a_i) est bien sommable et de somme A.

COROLLAIRE 9-*16*. — *Dans un espace normé complet, toute sous-famille d'une famille sommable est sommable.*

C'est une conséquence des énoncés 9-*6*, 9-*7*, 9-*15*.

REMARQUE. — Si F désigne un sous-espace vectoriel d'un espace normé complet E, avec $\overline{F} = E$, et si (a_i) est une famille d'éléments de F satisfaisant au critère de Cauchy, nous venons de voir qu'elle est sommable dans E ; mais évidemment si sa somme n'appartient pas à F, elle n'est pas sommable dans F. Cet exemple montre la raison pour laquelle une famille peut vérifier le critère de Cauchy sans être sommable.

Familles absolument sommables dans les espaces normés. — Il n'est pas toujours facile de reconnaître si une famille d'éléments d'un espace normé est sommable. Aussi est-il utile de connaître des critères suffisants de sommabilité ; un tel critère est fourni par la notion d'absolue sommabilité :

Définition 9-*17*. — SOIT E UN ESPACE NORMÉ. ON DIT QU'UNE FAMILLE (a_i) D'ÉLÉMENTS DE E EST *ABSOLUMENT SOMMABLE* SI LA FAMILLE DE LEURS NORMES $\|a_i\|$ EST SOMMABLE.

En apparence cette définition dépend de la norme de E ; en fait elle ne dépend que de la topologie de E, car si p et p' sont deux normes équivalentes sur E, il existe deux constantes $k, k' > 0$ telles que $p' \leqslant kp$ et $p \leqslant k'p'$; donc si l'une des familles $(p(a_\iota))$, $(p'(a_\iota))$ est sommable, l'autre l'est aussi.

PROPOSITION 9-*18*. — *Dans un espace normé* complet, *toute famille absolument sommable est sommable.*

DÉMONSTRATION. — D'après le théorème 9-*15*, il suffit de montrer que si la famille (a_i) est absolument sommable, elle satisfait au critère de Cauchy.

Or si la famille des $\|a_i\|$ est sommable, elle satisfait au critère de Cauchy ; donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J_0 \in \mathscr{F}$ tel que pour tout $K \in \mathscr{F}$ disjoint de J_0 on ait

$$\sum_{\iota \in K} \|a_\iota\| \leqslant \varepsilon .$$

Or $$\|A_K\| = \|\sum_{\iota \in K} a_\iota\| \leqslant \sum_{\iota \in K} \|a_\iota\| , \qquad \text{d'où } \|A_K\| \leqslant \varepsilon .$$

Donc la famille (a_i) satisfait au critère de Cauchy.

Z Il est essentiel de noter que dans un espace normé une famille peut être sommable sans être absolument sommable ; en voici deux exemples :

1° Soit (f_n) la suite d'éléments de $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$ ainsi définie :

$$f_n(t) = t \sin^2 \frac{\pi}{t} \qquad \text{sur } \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]; \qquad f_n(t) = 0 \text{ hors de cet intervalle}$$

On a $$\|f_n\| \geqslant f_n\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{2n+1} ;$$

donc la famille (f_n) n'est pas absolument sommable ; or elle est sommable et a pour somme la fonction f définie par :

$$f(0) = 0 ; \quad f(t) = t \sin^2 \frac{\pi}{t} \qquad \text{si } t \neq 0 .$$

2° Dans l'espace vectoriel normé l^2, soit a_n le vecteur de l^2 dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf celle d'indice n, qui vaut n^{-1}. La famille (a_n) n'est pas absolument sommable puisque $\|a_n\| = n^{-1}$; or cette famille est sommable et a pour somme le vecteur

$$x = (1, 2^{-1}, \ldots, n^{-1}, \ldots) .$$

Ces deux exemples ne sont que des cas particuliers de l'énoncé général suivant :

Dans tout espace normé de dimension infinie, il existe des suites sommables qui ne sont pas absolument sommables (voir exercice 84).

Nous allons voir que dans les espaces de dimension finie la situation est plus simple :

PROPOSITION 9-*19*. — *Dans tout espace normé de dimension finie, il y a équivalence entre la sommabilité et l'absolue sommabilité.*

DÉMONSTRATION. — Tout espace normé de dimension finie sur **K** est un espace normé de dimension finie sur **R**; d'autre part le corollaire 7-*3* nous permet de supposer que ce dernier espace est $\mathbf{R}^n$, muni de la norme

$$\|x\| = \sum |x_p|.$$

Comme $\mathbf{R}^n$ est complet, toute famille absolument sommable dans $\mathbf{R}^n$ est sommable. Inversement, si la famille (a_i) est sommable dans $\mathbf{R}^n$, la proposition 9-*3* montre que pour tout $p \leqslant n$, la famille (a_i^p) des coordonnées d'indice p des a_i est sommable; donc la famille des $|a_i^p|$ est aussi sommable; et comme $\|a_i\| = \sum_p |a_i^p|$, la famille des $\|a_i\|$, qui est somme de n familles sommables, est sommable.

COROLLAIRE 9-*20*. — *Pour toute famille de nombres complexes, il y a équivalence entre la sommabilité et l'absolue sommabilité.*

Applications multilinéaires et familles sommables. — Nous allons étendre le résultat obtenu en 9-*14* concernant le produit de deux familles de nombres réels.

PROPOSITION 9-*21*. — *Soient* E, F *deux espaces normés, et soit* f *une application bilinéaire continue de* $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ *dans un espace normé complet* G.

Soit $(a_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ (*resp.* $(b_j)_{j \in \mathrm{J}}$) *une famille sommable d'éléments de* E (*resp.* F) *de somme* A (*resp.* B).

Lorsque ces deux familles sont absolument sommables, *la famille des* $f(a_\iota, b_j)$ *est aussi absolument sommable, et sa somme est* $f(\mathrm{A}, \mathrm{B})$.

DÉMONSTRATION. — Comme f est continue, il existe (voir proposition 6-*1*) une constante k telle que

$$\|f(x, y)\| \leqslant k\, \|x\| \cdot \|y\| \qquad \text{pour tous } x, y.$$

On a donc

$$\|f(a_\iota, b_j)\| \leqslant k\, \|a_\iota\| \cdot \|b_j\|;$$

or les familles des $\|a_i\|$ et $\|b_j\|$ étant sommables, la famille des produits $\|a_i\| \cdot \|b_j\|$ l'est aussi (voir 9-*14*); donc la famille des $f(a_i, b_j)$ est absolument sommable, et comme G est complet, elle est sommable.

Remarquons maintenant que pour tout $a \in \mathrm{E}$ on a $\sum_j f(a, b_j) = f(a, \mathrm{B})$

puisque l'application $y \to f(a, y)$ est linéaire et continue (voir proposition 9-*3*); même remarque pour les $f(a_i, b)$.

Donc, d'après l'associativité de la somme, on a :

$$\sum_{i,j} f(a_i, b_j) = \sum_i (\sum_j f(a_i, b_j)) = \sum_i f(a_i, \mathrm{B}) = f(\mathrm{A}, \mathrm{B}).$$

COROLLAIRE 9-*22*. — *Si* (a_i), (b_j) *sont deux familles sommables de nombres complexes, de sommes respectives* A *et* B, *la famille produit* $(a_i b_j)$ *est sommable et de somme* $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$.

En effet, l'application $(x, y) \longrightarrow xy$ de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ est bilinéaire et continue.

REMARQUES. — 1° La proposition 9-*21* s'étend évidemment à toute application multilinéaire continue.

2° Dans l'énoncé de la proposition 9-*21*, l'hypothèse que les familles (a_i) et (b_j) sont absolument sommables est essentielle; par contre on pourrait y supprimer l'hypothèse que G est complet; il suffirait de remarquer que, si G n'est pas complet, on peut le supposer plongé dans un espace normé complet G′ (voir exercice 48).

10. — Séries; comparaison des séries et des familles sommables

Définition 10-*1*. — SOIT $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ UNE SUITE D'ÉLÉMENTS D'UN GROUPE TOPOLOGIQUE COMMUTATIF ET SÉPARÉ G.

ON APPELLE *SÉRIE* DÉFINIE PAR LA SUITE (a_n) LE COUPLE CONSTITUÉ PAR LES DEUX SUITES (a_n) ET (s_n) OÙ s_n EST LA SOMME PARTIELLE $\sum_{i \leq n} a_i$.

ON DIT QUE CETTE SÉRIE *CONVERGE* SI LA SUITE s_n EST CONVERGENTE; SA LIMITE s (UNIQUE PUISQUE G EST SÉPARÉ) S'APPELLE LA *SOMME* DE LA SÉRIE ET ON LA NOTE $\sum_0^\infty a_n$ OU SIMPLEMENT $\sum a_n$.

LORSQU'ELLE NE CONVERGE PAS, ON DIT QU'ELLE *DIVERGE*.

REMARQUES. — 1° Il est commode de noter la série définie par la suite (a_n) par le symbole $a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$; cette notation est *a priori* dépourvue de sens, mais elle est assez suggestive.

On dit aussi plus simplement « la série de terme général a_n » ou « la série (a_n) ».

2° On remplace parfois l'ensemble des indices $\mathbf{N}$ par $\mathbf{N}^*$; plus généralement on peut remplacer $\mathbf{N}$ par une suite d'indices munie d'un ordre isomorphe à celui de $\mathbf{N}$.

3° Si l'opération de G est notée multiplicativement, on remplace l'expression « série » par « produit infini », et on note $\prod_0^\infty a_i$ la limite des produits partiels $p_n = \prod_0^n a_i$.

4° Lorsque les a_n sont des nombres réels, on dit aussi que la série (a_n) converge dans $\overline{\mathbf{R}}$ et a pour somme $+\infty$ (ou $-\infty$) si $\lim s_n = +\infty$ (ou $-\infty$).

Signalons, sans en donner l'énoncé ni la démonstration, que les énoncés 9-*2* et 9-*3* ont des analogues immédiats pour les séries.

Critère de Cauchy. — **Définition 10-*2*.** — ON DIT QU'UNE *SÉRIE* DE TERME GÉNÉRAL a_n DANS G SATISFAIT AU *CRITÈRE DE CAUCHY* SI LA SUITE (s_n) DES SOMMES PARTIELLES EST UNE SUITE DE CAUCHY DE G, AUTREMENT DIT SI POUR TOUT VOISINAGE V DE O, IL EXISTE UN ENTIER n_0 TEL QUE LES RELATIONS $n_0 \leqslant p \leqslant q$ ENTRAÎNENT

$$s_q - s_p \in V, \quad \text{OU ENCORE} \quad (a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_q) \in V.$$

Lorsque G est un espace normé, il est plus commode de remplacer dans cet énoncé le voisinage V par un nombre $\varepsilon > 0$, et la condition $s_q - s_p \in V$ par $\|s_q - s_p\| \leqslant \varepsilon$.

PROPOSITION **10-*3***. — *1° Toute série convergente satisfait au critère de Cauchy.*

2° Inversement, lorsque G *est un espace normé complet, toute série satisfaisant au critère de Cauchy est convergente.*

C'est immédiat puisque la convergence d'une série (a_n) se traduit par celle de la suite (s_n).

PROPOSITION **10-*4***. — *Pour toute série satisfaisant au critère de Cauchy (donc en particulier pour toute série convergente), la suite (a_n) tend vers* O.

En effet, avec les notations de la définition 10-*2*, on a :

$$a_{n+1} = s_{n+1} - s_n \in V \qquad \text{pour tout } n \geqslant n_0 .$$

Z Rappelons le fait bien connu que la réciproque de cette proposition est fausse, même dans **R**. Par exemple la série de terme général $a_n = n^{-1}$ ne satisfait pas au critère de Cauchy puisque $s_{2p} - s_p \geqslant 2^{-1}$ pour tout p; et cependant $\lim a_n = O$.

Commutativité et associativité. — Etudions d'abord l'*associativité*, plus facile à étudier que la commutativité. Si l'on ne change pas l'ordre des éléments a_n d'une série, le seul groupement de termes qui soit possible consiste

à les grouper en tronçons de la forme $(a_{p+1}+a_{p+2}+\ldots+a_q)$; on peut alors énoncer :

PROPOSITION **10-5**. — *Soit (a_n) une suite d'éléments de G, et soit α_n une suite strictement croissante d'entiers $\geqslant 0$; posons $b_n = \sum a_i$ pour $\alpha_{n-1} \leqslant i < \alpha_n$.*

Si la série (a_n) satisfait au critère de Cauchy, la série (b_n) y satisfait aussi. Si la première converge, la seconde converge aussi, et leurs sommes sont égales.

En effet, la suite des sommes partielles de la seconde série est une sous-suite de la suite des sommes partielles de la première série.

Z Il peut arriver que la seconde série converge et que la première ne converge pas : Par exemple si $a_n = (-1)^n$ et $b_n = a_{2n}+a_{2n+1}$.

Définition 10-6. — ON DIT QU'UNE SÉRIE (a_n) EST *COMMUTATIVEMENT CONVERGENTE* SI, POUR TOUTE PERMUTATION π DE **N**, LA SÉRIE $(a_{\pi(n)})$ EST CONVERGENTE.

Remarquons que cette définition n'impose pas *a priori* que les séries (a_n) et $(a_{\pi(n)})$ aient même somme.

THÉORÈME **10-7**. — *Dire qu'une série (a_n) est commutativement convergente équivaut à dire que la famille (a_n) est sommable.*

La somme de la famille (a_n) est alors égale à celle de chacune des séries $(a_{\pi(n)})$.

DÉMONSTRATION. — 1° Supposons la famille (a_n) sommable, et soit A sa somme. Pour tout voisinage V de O, il existe J_0 fini $\subset$ **N** tel que pour tout J fini contenant J_0 on ait $A-A_J \in V$.

Si n_0 est le plus grand élément de J_0, le segment $[0, p]$ de **N** contient J_0 pour tout $p \geqslant n_0$, et alors $A-s_p \in V$; autrement dit la série (a_n) a pour somme A. Ce raisonnement s'applique évidemment à chacune des séries $(a_{\pi(n)})$.

2° Supposons par contre que la famille (a_n) ne soit pas sommable. Deux cas sont alors possibles :

a) La famille (a_n) ne satisfait pas au critère de Cauchy ; il existe alors un voisinage V de O tel que pour tout J fini $\subset$ **N**, il existe K (J) fini $\subset$ $(\mathbf{N} \dot{-} J)$ pour lequel $A_{K(J)} \notin V$.

Posons $J_0 = \phi$; et de façon générale $J_{n+1} = J_n \cup K(J_n)$. Les ensembles $K(J_n)$ sont des parties finies de **N**, disjointes deux à deux, et pour chacun d'eux

$$A_{K(J_n)} \notin V.$$

On construit facilement une permutation π de **N** telle que dans la suite $(a_{\pi(n)})$ les éléments a_n pour lesquels $n \in K(J_p)$ (pour un p donné) deviennent consécutifs.

Posons alors $b_n = a_{\pi(n)}$; la série (b_n) ne satisfait pas au critère de Cauchy puisqu'elle contient une infinité de « tronçons » disjoints dont chacun a une somme hors de V.

La série (a_n) n'est donc pas commutativement convergente.

b) La famille (a_n) satisfait au critère de Cauchy ; montrons qu'alors aucune série formée avec les a_n n'est convergente : supposons par exemple que la série (a_n) soit convergente et de somme A. Pour tout voisinage V de O, il existe un J_0 fini $\subset \mathbf{N}$ tel que $A_K \in V$ pour tout K fini disjoint de J_0 ; mais il existe aussi un entier n_0 tel que $A_K \in A+V$ (où $K_0 = \{1, 2, ..., n\}$).

On a donc :

$$A_{J_0 \cup K_0 \cup K} \in A + (V + V) \quad \text{pour tout K fini} \subset \mathbf{N}\,.$$

Comme $(V+V)$ est arbitrairement petit, cette relation montre que la famille (a_n) est sommable et de somme A, contrairement à l'hypothèse.

Séries absolument convergentes dans les espaces normés.

Définition 10-*8*. — SOIT E UN ESPACE NORMÉ; ON DIT QU'UNE SÉRIE (a_n) DANS E EST *ABSOLUMENT CONVERGENTE* SI LA SÉRIE DE TERME GÉNÉRAL $\|a_n\|$ EST CONVERGENTE.

Cette définition nous amène à l'étude des séries positives :

LEMME **10-*9*.** — *Soit (a_n) une suite de nombres positifs; les trois énoncés suivants sont équivalents :*

1° La série (a_n) est convergente;

2° L'ensemble des sommes s_n est majoré;

3° La famille (a_n) est sommable.

DÉMONSTRATION. — 1 ⇒ 2. — Car la suite (s_n) est croissante; donc si $\lim s_n = s$, on a $s_n \leqslant s$ pour tout n.

2 ⇒ 3. — Car toute somme A_K est majorée par une somme $A_{[0,n]} = s_n$; donc si $s_n \leqslant k$, les sommes A_K sont majorées, d'où la sommabilité de la famille (a_n).

3 ⇒ 1. — Car d'après le théorème 10-*7*, la sommabilité entraîne la convergence de la série (et même la convergence commutative).

COROLLAIRE **10-*10*.** — *Dans un espace normé, dire qu'une série (a_n) est absolument convergente équivaut à dire que la famille (a_n) est absolument sommable.*

COROLLAIRE **10-*11*.** — *Dans un espace normé complet, toute série absolument convergente est commutativement convergente.*

Ce dernier corollaire résulte des énoncés 9-*18*, 10-*7* et 10-*10*.

PROPOSITION **10**-*12* *(cas des espaces de dimension finie). — Soit (a_n) une suite d'éléments d'un espace normé de dimension finie.*

Les énoncés suivants sont équivalents :

1° La série (a_n) est commutativement convergente;

2° La série (a_n) est absolument convergente;

3° La famille (a_n) est sommable;

4° La famille (a_n) est absolument sommable.

C'est une conséquence des énoncés 9-*19*, 10-*10* et 10-*11*.

Cette proposition s'applique en particulier aux séries de nombres complexes.

Séries semi-convergentes **10**-*13*. — La série harmonique alternée de terme général $(-1)^n n^{-1}$ offre un exemple de série convergente qui ne soit pas commutativement convergente; on dit parfois d'une telle série qu'elle est *semi-convergente*. C'est là une terminologie assez évocatrice mais dont il ne faut pas abuser : Par exemple si une série (a_n) est semi-convergente, la série $(-a_n)$. l'est aussi, mais la somme de ces deux séries est commutativement convergente, donc n'est pas semi-convergente. De même il n'existe pas à proprement parler de critères de semi-convergence; il existe seulement des critères (suffisants) de convergence dans lesquels on ne se préoccupe pas de savoir si la série (a_n) est, ou non, commutativement convergente.

Les critères de ce type les plus utilisés sont fournis par une inégalité simple due à Abel.

LEMME **10**-*14*. — *Soit (a_n) une suite d'éléments d'un espace normé E; et soit (λ_n) une suite décroissante de nombres positifs; on pose :*

$$k_n = \sup_{p \geqslant 0} \|a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}\|$$

Alors pour tous n, p on a :

$$\|\lambda_n a_n + \lambda_{n+1} a_{n+1} + \dots + \lambda_{n+p} a_{n+p}\| \leqslant \lambda_n k_n$$

DÉMONSTRATION. — Posons $b_{n,p} = a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}$; on peut écrire, par une transformation simple appelée *transformation d'Abel* (et similaire à l'intégration par parties) :

$$\begin{aligned}
&\|\lambda_n a_n + \dots + \lambda_{n+p} a_{n+p}\| \\
&\quad = \|\lambda_n b_{n,0} + \lambda_{n+1}(b_{n,1} - b_{n,0}) + \dots + \lambda_{n+p}(b_{n,p} - b_{n,p-1})\| \\
&\quad = \|(\lambda_n - \lambda_{n+1}) b_{n,0} + \dots + (\lambda_{n+p-1} - \lambda_{n+p}) b_{n,p-1} + \lambda_{n+p} b_{n,p}\| \\
&\quad \leqslant k_n \left((\lambda_n - \lambda_{n+1}) + \dots + (\lambda_{n+p-1} - \lambda_{n+p}) + \lambda_{n+p}\right) = \lambda_n k_n \,.
\end{aligned}$$

Il résulte de ce lemme que si la suite $(\lambda_n k_n)$ tend vers 0, la série des $\lambda_n a_n$

satisfait au critère de Cauchy; d'où, en utilisant le fait que la suite (λ_n) est décroissante, deux cas où la série des $\lambda_n a_n$ va converger :

PROPOSITION **10-*15*** (RÈGLE D'ABEL). — *Soient (a_n) une suite d'éléments d'un espace normé complet* E, *et (λ_n) une suite décroissante de nombres positifs.*

Dans chacun des deux cas suivants, la série $(\lambda_n a_n)$ est convergente :

a) La série (a_n) est convergente;

b) L'ensemble des sommes $s_n = (a_0 + a_1 + ... + a_n)$ est borné dans E, *et* $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$.

DÉMONSTRATION. — Puisque E est complet il suffit, d'après le lemme 10-*14*, de vérifier que la suite des $\lambda_n k_n$ tend vers 0.

Dans le premier cas, la convergence de la série (a_n) entraîne $\lim\limits_{n \to \infty} k_n = 0$; or $\lambda_n \leqslant \lambda_0$, d'où $\lambda_n k_n \leqslant \lambda_0 k_n$, d'où le résultat.

Dans le deuxième cas, la relation $a_n + a_{n+1} + ... + a_{n+p} = s_{n+p} - s_{n-1}$ montre que l'ensemble des $b_{n,p}$ est borné; donc il existe un nombre $k \geqslant 0$ tel que $k_n \leqslant k$; on a donc $\lambda_n k_n \leqslant \lambda_n k$, d'où $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n k_n = 0$.

EXEMPLES **10-*16***. — Appelons *série alternée* toute série de nombres réels dont le terme général s'écrit $\lambda_n a_n$, où $a_n = (-1)^n$ et $\lambda_n \geqslant 0$ (ou $\lambda_n \leqslant 0$, mais un changement de signe général ramène au cas précédent).

La condition $\|s_n\| \leqslant k$ est satisfaite puisque $s_n = 0$ ou 1. Donc si λ_n tend vers 0 *en décroissant*, la série alternée de terme général $(-1)^n \lambda_n$ est convergente.

10-*17*. — Prenons pour a_n le nombre complexe k^n, où $|k| = 1$ et $k \neq 1$. La relation $s_n = (1-k^{n+1})/(1-k)$ montre que

$$|s_n| \leqslant 2\,|1-k|^{-1}.$$

Donc, avec les notations précédentes, la série $(\lambda_n k^n)$ est convergente lorsque λ_n est une suite positive décroissante de limite 0.

La série des parties réelles (resp. imaginaires) converge aussi; autrement dit, si l'on pose $k = e^{it}$, la série réelle de terme général $\lambda_n \cos nt$ (resp. $\lambda_n \sin nt$) converge pour tout $t \neq 0 \bmod 2\pi$.

Méthode d'étude d'une série numérique* 10-*18. — L'idée centrale consiste à étudier le comportement du terme général a_n; s'il ne tend pas vers 0, la série diverge; s'il tend vers 0 on cherche si la série des valeurs absolues $|a_n|$ converge :

Pour cela, si $|a_n|$ a une expression compliquée, on cherche à majorer $|a_n|$ par le terme général d'une série positive plus facile à étudier; par exemple si $a_n = n^{-2} \cos n$, on a $|a_n| \leqslant n^{-2}$, d'où convergence absolue; si $|a_n|$ a une

règle de formation simple et régulière on peut essayer d'appliquer les critères utilisant les lim sup de $|a_{n+1}|/|a_n|$ ou de $|a_n|^{1/n}$ (voir 8-*6*). Mais la véritable règle générale consiste à étudier la rapidité de convergence de $|a_n|$ vers 0.

Si la série des $|a_n|$ diverge, on peut tenter d'appliquer la règle d'Abel; elle est théoriquement toujours applicable (voir exercices 107 et 108), mais mis à part les cas signalés dans 10-*16* et 10-*17*, les cas où elle peut rendre des services sont assez rares.

Enfin, il ne faut pas oublier que la convergence d'une série (a_n) n'est autre que la convergence de la suite (s_n). Par exemple, dans l'étude des développements de fonctions en série, lorsqu'on a l'identité :

$$f(t) = a_0(t) + a_1(t) + \ldots + a_n(t) + r_n(t),$$

et lorsque, pour un t donné, $\lim_{n\to\infty} r_n(t) = 0$, la série de terme général $a_n(t)$ converge et a pour somme $f(t)$.

11. — Séries et familles sommables de fonctions

On va étudier ici les séries et familles sommables dont les éléments dépendent d'un paramètre, autrement dit les séries et familles sommables de fonctions; nous n'expliciterons les énoncés que pour les familles sommables; une adaptation facile fournira les énoncés concernant les séries.

Définition 11-*1*. — Soit X un ensemble quelconque; soit G un groupe topologique commutatif et séparé, et soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'applications de X dans G.

On dit que la famille $(a_i(x))$ est *uniformément sommable* sur X si pour tout $x \in X$ elle est sommable (et de somme $s(x)$), et si les sommes partielles finies $s_J = \sum_{i\in J} a_i$ convergent uniformément vers s, c'est-à-dire si pour tout voisinage V de O, il existe un J_0 fini $\subset$ I tel que pour tout J fini contenant J_0, et pour tout $x \in X$, on ait

$$s(x) - s_J(x) \in V.$$

Pour les séries $(a_n(x))$, la convergence uniforme s'exprime par la convergence uniforme de la suite $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ vers s.

Proposition **11-*2*.** — *Si la famille $(a_i(x))$ est sommable pour tout $x \in X$, les énoncés suivants sont équivalents :*

1° La famille est uniformément sommable sur X;

2° (Critère de Cauchy uniforme). Pour tout voisinage V de O, il existe J_0 fini $\subset$ I tel que pour tout K fini disjoint de J_0, et pour tout $x \in X$, on ait $s_K(x) \in V$.

DÉMONSTRATION. — 1 ⇒ 2. — Soit U un voisinage symétrique de O tel que $U+U \subset V$. D'après l'hypothèse, il existe J_0 fini $\subset I$ tel que, pour tout K fini disjoint de J_0 et pour tout $x \in X$, on ait :

$$s(x)-s_{J_0}(x) \in U; \qquad s(x)-s_{J_0 \cup K}(x) \in U$$

d'où
$$s_K(x) \in U+U \subset V.$$

2 ⇒ 1. — L'hypothèse entraîne que pour tout voisinage V de O, il existe J_0 fini $\subset I$ tel que, pour tous J, J′ finis contenant J_0, on ait pour tout $x \in X$:

$$s_{J'}(x)-s_J(x) \in V$$

Supposons V fermé et fixons J ; pour tout $x \in X$, $s(x)$ est limite de sommes $s_{J'}(x)$; on a donc aussi :

$$s(x)-s_J(x) \in V.$$

Comme les V fermés constituent une base de voisinages de O, on a bien démontré la sommabilité uniforme de la famille.

REMARQUE. — Lorsque G est un espace normé, la condition $s_K(x) \in V$ s'exprime de préférence sous la forme $\|s_K(x)\| \leqslant \varepsilon$.

COROLLAIRE **11**-*3*. — *Soit (a_i) une famille d'applications d'un ensemble* X *dans un espace normé complet* E.

Pour que la famille $(a_i(x))$ soit uniformément sommable dans X, *il faut et il suffit qu'elle satisfasse au critère de Cauchy uniforme.*

DÉMONSTRATION. — Si la famille est uniformément sommable, elle satisfait au critère de Cauchy uniforme d'après la proposition 11-*2*. Inversement, si ce critère est satisfait, la famille $(a_i(x))$ est sommable pour tout x puisque E est complet (voir théorème 9-*15*); donc elle est uniformément sommable d'après 11-*2*.

PROPOSITION **11**-*4*. — *Soit (a_i) une famille d'applications d'un espace topologique* X *dans un espace normé* E.

Si chaque a_i est continue et si la famille (a_i) est uniformément sommable, sa somme est aussi continue.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un J_0 fini dans I tel que pour tout $x \in X$ on ait :

$$\|s(x)-s_{J_0}(x)\| \leqslant \varepsilon .$$

Donc s est limite uniforme de fonctions s_{J_0}; comme les s_{J_0} sont continues, s l'est aussi.

Convergence normale. — Il n'est pas toujours facile de démontrer la sommabilité uniforme d'une famille de fonctions ; il est bon de disposer pour

cela de conditions suffisantes commodes ; en voici une qui n'est autre que la sommabilité absolue dans l'espace $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{E})$ des fonctions bornées.

Définition 11-*5*. — Soit $(a_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ une famille d'applications d'un ensemble X dans un espace normé ; on dit que cette famille est *normalement sommable* dans X s'il existe une famille sommable $(k_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ de nombres $\geqslant 0$ telle que, pour tout $\iota \in \mathrm{I}$ et pour tout $x \in \mathrm{X}$, on ait $\|a_\iota(x)\| \leqslant k_\iota$.

Cette condition peut s'exprimer aussi, plus brièvement, par la condition

$$\sum_\iota \|a_\iota\| < \infty, \qquad \text{où } \|a_\iota\| = \sup_{x \in \mathrm{X}} \|a_\iota(x)\|.$$

Notons que, dans cette définition, le mot « normalement » est choisi pour rappeler l'utilisation de la « norme » de la convergence uniforme.

Proposition **11-*6***. — *Toute famille normalement sommable d'applications d'un ensemble* X *dans un espace normé complet est uniformément sommable.*

Démonstration. — L'inégalité

$$\|\sum_{\iota \in \mathrm{K}} a_\iota(x)\| \leqslant \sum_{\iota \in \mathrm{K}} k_\iota$$

montre que, puisque la famille des k_ι est sommable, la famille (a_ι) satisfait au critère de Cauchy uniforme ; d'où sa sommabilité uniforme d'après le corollaire 11-*3*.

La définition 11-*5* et la proposition 11-*6* s'adaptent aisément au cas des séries.

***Comparaison des divers modes de convergence* 11-*7*.** — A toute famille (a_ι) d'applications d'un ensemble X dans un espace normé E sont associées les notions de sommabilité simple, uniforme, absolue, normale. Mêmes distinctions pour la convergence des séries.

Les relations entre ces divers modes de sommabilité ou de convergence sont une source de confusion pour les débutants ; aussi allons-nous insister un peu sur ces relations.

Nous n'examinerons ici que le cas des séries ; et pour éliminer les difficultés d'un autre ordre qui existent quand E n'est pas complet, nous supposerons que *E est complet.*

Les propositions établies ci-dessus fournissent le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow\!\!\!\!\nearrow & \text{c. absolue} & \searrow\!\!\!\!\searrow & \\ \text{c. normale} & & & & \text{c. simple} \\ & \searrow\!\!\!\!\searrow & \text{c. uniforme} & \nearrow\!\!\!\!\nearrow & \end{array}$$

Il en résulte évidemment que (c. normale) $\Rightarrow$ (c. simple), mais nous allons voir au moyen de quelques exemples qu'il n'existe aucune autre implication

que les cinq qui viennent d'être explicitées, même lorsqu'il s'agit de fonctions numériques continues sur [0, 1] :

11-*8*. — La convergence absolue (pour tout x) n'entraîne pas la convergence uniforme.

En effet, posons pour tout $x \in [0,1]$.

$$a_n(x) = (x^n - x^{n+1});$$

la série $(a_n(x))$ est positive et converge pour tout x, donc converge absolument.

Or $\qquad s(x) = 1 \quad \text{si } x \neq 1; \qquad \text{et} \qquad s(x) = 0 \quad \text{si } x = 1.$

Comme les sommes s_n sont continues, la limite s serait continue si la convergence était uniforme; comme s n'est pas continue, la convergence n'est pas uniforme.

11-*9*. — Inversement, la convergence uniforme n'entraîne pas la convergence absolue.

En effet, posons

$$a_n(x) = (-1)^n n^{-1} \quad \text{pour tout } x \in [0, 1] \text{ et tout } n \geqslant 1.$$

La série $(a_n(x))$ converge uniformément, mais elle ne converge absolument pour aucun x.

11-*10*. — Enfin montrons que, convergence uniforme et convergence absolue réunies n'entraînent pas la convergence normale : Il suffit de reprendre la série (f_n) utilisée dans l'exemple 1 qui suit la proposition 9-*18*.

***Application* 11-*11*.** — Soit α, β deux nombres complexes non nuls dont le quotient ne soit pas réel; et désignons par P la partie de $\mathbf{C}$ constituée par les nombres complexes de la forme

$$w_{p,q} = p\alpha + q\beta, \quad \text{où } p \text{ et } q \in \mathbf{Z};$$

c'est un sous-groupe additif fermé de $\mathbf{C}$, dont chaque point est isolé.

Désignons par $a_{p,q}$ la fonction définie dans $(\mathbf{C} \dot{-} \mathrm{P})$ par :

$$a_{0,0}(z) = z^{-2}; \quad a_{p,q}(z) = (z - w_{p,q})^{-2} - w_{p,q}^{-2} \quad \text{si } (p, q) \neq (0, 0).$$

Montrons que pour tout compact K de $\mathbf{C}$, la famille déduite de la famille $(a_{p,q})$ en lui retirant une sous-famille finie convenable est uniformément sommable sur K.

En effet, soit $\rho > 0$; supprimons de la famille les termes $a_{p,q}$ tels que $|w_{p,q}| \leqslant 2\rho$.

Si $|w| > 2\rho$, et si $|z| \leqslant \rho$, on a :

$$\left|\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right| = \left|\frac{z(2w-z)}{w^2(z-w)^2}\right| \leqslant |\rho| \frac{3|w|}{|w|^2 \, |\frac{1}{2}w|^2} = \frac{12\rho}{|w|^3}.$$

Or la famille des $|w_{p,q}|^{-3}$ (où $(p, q) \neq (0, 0)$) est sommable; en effet, remarquons que $|w_{p,q}| \geqslant k(|p| + |q|)$ où k est un nombre > 0 (utiliser le fait $|x\alpha + y\beta|$ et $(|x| + |y|)$ sont deux normes sur $\mathbf{C}$). Donc

$$\sum |w_{p,q}|^{-3} \leqslant \sum k^{-3}(|p|+|q|)^{-3} \leqslant 4k^{-3} \sum_{p,\, q \geqslant 0} (p+q)^{-3}.$$

Comme la famille des $(p+q)^{-3}$ où $p, q \in \mathbf{N}$ et $(p, q) \neq (0, 0)$ est sommable (voir 8-7), la famille des $|w_{p,q}|^{-3}$ l'est aussi.

Donc la famille des $a_{p,q}$, après exclusion d'un nombre fini de termes, est normalement convergente sur le disque $|z| < \rho$; comme les $a_{p,q}$ considérés sont continus sur ce disque (et même holomorphes [1]), leur somme est continue (et même holomorphe) dans ce disque.

La somme f de tous les $a_{p,q}$ est donc holomorphe dans $(\mathbf{C} \dot{-} \mathrm{P})$, et plus précisément elle est méromorphe [1] dans $\mathbf{C}$, avec P comme ensemble des pôles, la partie singulière de f au pôle $w_{p,q}$ étant $(z - w_{p,q})^{-2}$.

Cette fonction f joue un rôle important dans la théorie des fonctions méromorphes doublement périodiques.

12 — Familles multipliables et produits infinis de nombres complexes

Les familles sommables et les séries ont été définies, aux paragraphes 9 et 10, dans un groupe topologique commutatif et séparé; et nous avons fait remarquer que lorsque l'opération du groupe est notée multiplicativement, on les appelle familles multipliables et produits infinis.

C'est le cas en particulier lorsque le groupe G est le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^*$ des nombres complexes non nuls, muni de la topologie induite par celle de $\mathbf{C}$.

Puisque la théorie développée dans les groupes G généraux s'applique à $\mathbf{C}^*$, les énoncés généraux ont des traductions immédiates dans $\mathbf{C}^*$. Toutefois, le fait que les familles multipliables de nombres complexes auront leurs applications essentielles dans la théorie des fonctions holomorphes, conduit à modifier un peu la définition des familles multipliables et des produits infinis de façon à ne plus exclure la valeur 0 comme produit possible. Cette extension

---

[1] f est dite méromorphe si au voisinage de tout point de $\mathbf{C}$ elle est égale au quotient de deux fonctions holomorphes.

simplifiera en outre l'exposé en nous permettant d'utiliser le fait que **C** est un espace métrique complet.

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de **C** ; nous reprendrons les notations $\mathscr{F}$ et $\mathscr{B}$ utilisées pour la définition 8-*1*, et pour tout $J \in \mathscr{F}$, nous noterons p_J le produit fini $\prod_{i \in J} a_i$.

Définition 12-*1*. — ON DIT QU'UNE FAMILLE $(a_i)_{i \in I}$ D'ÉLÉMENTS DE **C** EST *MULTIPLIABLE DANS* **C**, ET A POUR PRODUIT p SI, POUR TOUT $\varepsilon > 0$, IL EXISTE $J_0 \in \mathscr{F}$ TEL QUE, POUR TOUT $J \in \mathscr{F}$ CONTENANT J_0, ON AIT $|p - p_J| \leqslant \varepsilon$.

LE PRODUIT p SE NOTE ALORS $\prod_{i \in I} a_i$, OU $\prod_i a_i$, OU ENCORE $\prod a_i$.

ON DIT QUE CETTE FAMILLE EST MULTIPLIABLE DANS **C*** SI EN OUTRE $p \neq 0$.

Autrement dit, la famille (a_i) est multipliable et de produit p si les p_J convergent vers p suivant le filtre de base $\mathscr{B}$.

L'unicité de p résulte de ce que la topologie de **C** est séparée.

Notons que si $p \neq 0$, on a aussi $a_i \neq 0$ pour tout i; la définition 12-*1* coïncide alors avec la définition de la multipliabilité dans le groupe topologique **C*** (d'où la terminologie adoptée dans 12-*1*).

On définirait de façon analogue la convergence d'un produit infini de terme général a_n (où $n \in$ **N** ou **N***), par la convergence de la suite des produits partiels $p_n = \prod_{k \leqslant n} a_k$ vers p.

Relation entre la multipliabilité des $(1 + u_i)$ ***et la sommabilité des*** u_i. — Le fait que, pour toute famille (a_i) multipliable dans **C***, les a_i sont tous, à l'exception d'un nombre fini d'entre eux, ε-voisins de 1, conduit à poser $a_i = (1 + u_i)$.

Non seulement cette forme est suggestive, mais elle conduit au théorème suivant, qui constitue un pont entre les notions de multipliabilité et de sommabilité :

THÉORÈME **12-*2***. — *Soit* $(1 + u_i)_{i \in I}$ *une famille d'éléments de* **C** *telle que* $1 + u_i \neq 0$ *pour tout* $i \in I$.

Alors la sommabilité de la famille (u_i) *équivaut à la multipliabilité de la famille* $(1 + u_i)$ *dans* **C***.

DÉMONSTRATION. — Posons, pour tout $z \in$ **C** :

$$f(z) \text{ ou } e^z = \sum_0^\infty z^n/n!$$

La théorie élémentaire des fonctions holomorphes permet d'établir les propriétés suivantes, que nous admettrons ici (voir aussi exercice 144) :

a) La fonction f (qu'on appelle « exponentielle ») est une représentation continue du groupe additif $\mathbf{C}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^*$.

b) Si l'on pose $V = \{z : |z| \leqslant \frac{1}{2}\}$, l'ensemble $W = f(V)$ est un voisinage fermé de 1, et la restriction de f à V est une homéomorphie de V sur $f(V)$.

Nous utiliserons aussi la relation suivante, qui se vérifie élémentairement :

$$\tfrac{1}{2}|\alpha| \leqslant |f(\alpha)-1| \leqslant 2|\alpha| \quad \text{pour tout } \alpha \in V.$$

Elle démontre, compte tenu du corollaire 9-*20*, la propriété suivante :

c) Pour toute famille (α_i) d'éléments de V, il y a équivalence entre la sommabilité des α_i, et celle des $\big(f(\alpha_i)-1\big)$.

1° Supposons que tous les $(1+u_i)$ appartiennent à W, et désignons par α_i l'élément de V tel que $f(\alpha_i) = 1+u_i$; la propriété *c*) montre que si la famille des u_i est sommable, celle des α_i l'est aussi. Et alors, comme f est une représentation continue de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}^*$, la proposition 9-*3* montre que la famille des $f(\alpha_i) = (1+u_i)$ est multipliable et que son produit est $\neq 0$.

Lorsque les u_i constituent une famille sommable quelconque, tous les u_i, sauf un nombre fini d'entre eux, appartiennent au voisinage $(-1+W)$ de 0, donc d'après ce qu'on vient de voir, la famille des $(1+u_i)$ correspondants est multipliable et de produit $\neq 0$. La famille initiale est donc aussi multipliable et son produit est $\neq 0$ si tous les $(1+u_i)$ sont $\neq 0$.

2° Inversement, soit $(1+u_i)_{i \in I}$ une famille multipliable dans $\mathbf{C}^*$ telle que tous les produits finis p_J appartiennent à W ; si p est son produit, on a alors aussi $p \in W$ puisque W est fermé.

Soit α_i le point de V tel que $f(\alpha_i) = 1+u_i$; soit s le point de V tel que $f(s) = p$; et posons $s_J = \sum_{i \in J} \alpha_i$ pour tout $J \in \mathscr{F}$.

La propriété *a*) montre que $f(s_J) = p_J$, donc d'après la propriété *b*), la convergence des p_J vers p entraîne la convergence des s_J vers s; donc la famille des α_i est sommable et de somme s. La propriété *c*) montre enfin que la famille des $u_i = \big(f(\alpha_i)-1\big)$ est sommable.

Supposons maintenant que les $(1+u_i)$ constituent une famille multipliable quelconque dans $\mathbf{C}^*$. Elle satisfait donc au critère de Cauchy (voir corollaire 9-*6*) ; donc après suppression d'un nombre fini de termes, la famille restante a tous ses produits partiels dans W ; on vient de voir que la famille des u_i de cette famille est alors sommable, d'où aussi la sommabilité de la famille initiale des u_i.

Remarque **12**-*3*. — Cette démonstration, fort simple dans son principe a l'inconvénient d'utiliser la théorie des fonctions holomorphes. Il est intéressant de connaître une démonstration élémentaire de la partie la plus utile du théorème :

Supposons la famille (u_i) sommable, donc absolument sommable, et posons

$$\sum_{i \in I} |u_i| = k.$$

Pour tous J, K finis $\subset$ I, on a :

$$|p_J| \leqslant \prod_{i \in J} (1 + |u_i|) \leqslant e^{\sum_{i \in J} |u_i|} \leqslant e^k \qquad (a)$$

$$|p_K - 1| \leqslant \Big(\prod_{i \in K} (1 + |u_i|) - 1\Big) \leqslant \Big(e^{\sum_{i \in K} |u_i|} - 1\Big) \leqslant e^k \sum_{i \in K} |u_i| . \text{ [1]} \qquad (b)$$

Or pour tout $\varepsilon > 0$, il existe J_0 fini $\subset$ I tel que, pour tout K fini disjoint de J_0, on ait

$$\sum_{i \in K} |u_i| \leqslant \varepsilon.$$

On a donc aussi, en utilisant (*a*) et (*b*),

$$|p_{J_0 \cup K} - p_{J_0}| = |p_{J_0}| \cdot |p_K - 1| \leqslant \varepsilon e^{2k}. \qquad (c)$$

L'application $J \longrightarrow p_J$ de $\mathscr{F}$ dans **C** satisfait donc à la condition de Cauchy (voir 20-7-2, chap. V), donc converge dans **C** suivant l'ensemble ordonné $\mathscr{F}$; autrement dit la famille des $(1 + u_i)$ est multipliable dans **C**.

Si maintenant $(1 + u_i) \neq 0$ pour tout i, on a $p_{J_0} \neq 0$ pour tout J_0 fini, et d'autre part si on a $|u_i| < \frac{1}{2}$ pour tout i (ce qu'on peut supposer), on a pour tout K fini :

$$|p_K| \geqslant \prod_{i \in K} (1 - |u_i|) \geqslant \Big(\prod_{i \in K} (1 + 2|u_i|)\Big)^{-1} \geqslant e^{-2k}.$$

Il en résulte que $p_I \neq 0$.

Produits infinis. — Tout ce qui a été dit pour les groupes commutatifs quelconques s'applique évidemment au cas du groupe multiplicatif **C***; par exemple le théorème 10-7, permet d'énoncer :

PROPOSITION **12-4**. — *Dire qu'un produit infini de terme général* $(1 + u_n)$ *est commutativement convergent dans* **C*** *équivaut à dire que la famille des* $(1 + u_n)$ *est multipliable dans* **C***.

Chacun des produits infinis est alors égal au produit de la famille des $(1 + u_n)$.

Lorsqu'un produit infini a cette propriété, on dit parfois qu'il est *absolument convergent* (par allusion à la famille des $|u_n|$).

Produits infinis semi-convergents. — Comme pour les séries semi-convergentes, on dira qu'*un produit infini* de terme général $(1 + u_n)$ *est semi-convergent* s'il est convergent sans être commutativement convergent.

---

[1] On utilise ici l'inégalité élémentaire :

$$e^a - 1 = e^a(1 - e^{-a}) \leqslant a e^a, \quad \text{pour tout } a \geqslant 0.$$

On pourrait croire, par analogie avec le théorème 12-2, qu'il y a équivalence entre la semi-convergence du produit infini des $(1+u_n)$ et la semi-convergence de la série (u_n); nous allons voir que cette équivalence est à peu près réalisée lorsque les u_n sont réels, mais qu'elle ne l'est pas lorsqu'ils sont complexes.

PROPOSITION **12-5.** — *Soit* (u_n) *une suite de nombres* ***réels*** *de limite* 0, *et tels que* $1+u_n \neq 0$ *pour tout* n.

1° Si la série (u_n) *est convergente, le produit des* $(1+u_n)$ *converge vers un nombre* $p \in \mathbf{R}$; *on a* $p \neq 0$ *si* $\sum u_n^2 < \infty$, *et* $p=0$ *si* $\sum u_n^2 = \infty$.

2° Inversement, si le produit des $(1+u_n)$ *converge vers un nombre* $p \neq 0$, *la série* (u_n) *converge si* $\sum u_n^2 < \infty$; *elle a pour somme* $+\infty$ *si* $\sum u_n^2 = \infty$.

DÉMONSTRATION. — On peut supposer, après suppression d'un nombre fini de termes, que $|u_n| < 1$ pour tout n. On est alors conduit à utiliser l'isomorphisme $x \longrightarrow \operatorname{Log} x$ du groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$ sur le groupe additif $\mathbf{R}$: Si l'on pose $\alpha_n = \operatorname{Log}(1+u_n)$, la convergence du produit des $(1+u_n)$ vers p équivaut à la convergence de la série des α_n vers $\operatorname{Log} p$.

Or $$\alpha_n = \operatorname{Log}(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2}(1+\varepsilon_n), \qquad \text{où } \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Comme la série (u_n^2) est positive, cette relation montre que lorsque $\Sigma u_n^2 < \infty$, la convergence d'une des séries (u_n), (α_n) entraîne celle de l'autre.

Lorsque (u_n) converge et $\Sigma u_n^2 = \infty$, on a $\Sigma \alpha_n = -\infty$, donc $p=0$.

Inversement, lorsque (α_n) converge et $\Sigma u_n^2 = \infty$, on a $\Sigma u_n = \infty$.

REMARQUE. — Lorsque $p=0$, ce qui équivaut à $\Sigma \alpha_n = -\infty$, la situation est plus complexe; il peut arriver que la série (u_n) converge, diverge vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, ou diverge dans le sens le plus complet.

***Cas général* 12-6.** — La démonstration précédente a déjà montré l'intérêt de la fonction logarithme; nous allons l'utiliser à nouveau lorsque les u_n sont complexes.

Soit $(1+u_n)$ le terme général d'un produit infini, tel que $\lim u_n = 0$. Avec les notations utilisées à propos du théorème 12-2, pour tout n assez grand, on a $(1+u_n) \in W$, donc $(1+u_n)$ est de la forme $\exp \alpha_n$, où $\alpha_n \in V$; si donc on note Log la fonction réciproque f^{-1} de f dans W , on a

$$\alpha_n = \operatorname{Log}(1+u_n),$$

et on peut énoncer que *la convergence du produit infini des* $(1+u_n)$ *dans* $\mathbf{C}^*$ *équivaut à la convergence de la série des* $\alpha_n = \operatorname{Log}(1+u_n)$.

La théorie élémentaire des fonctions holomorphes montre que

$$\alpha = \operatorname{Log}(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}u^n}{n} + \dots \quad \text{pour } 1+u \in W.$$

Pratiquement c'est ce développement en série entière qui permettra de conclure si un produit infini est convergent ou non.

EXEMPLE 1. — Si la série des $|u_n|^2$ est convergente, la relation :

$$\alpha = \text{Log}\,(1+u) = u - \frac{u^2}{2}(1+\varepsilon(u)), \qquad \text{où} \lim_{u \to 0} \varepsilon(u) = 0,$$

montre que les séries (u_n) et (α_n) convergent ou divergent simultanément

EXEMPLE 2. — Par contre, voici un exemple montrant que si la série (u_n^2) ne converge pas absolument, la série (u_n) peut converger sans que le produit des $(1+u_n)$ converge dans **C**, ni même dans **C** muni d'un point à l'infini :

On pose $u_n = (-1)^n n^{-\frac{1}{2}}$ ou $i(-1)^n n^{-\frac{1}{2}}$, suivant que la partie entière de Log n est paire ou impaire.

On vérifiera que la série (u_n) est convergente, que la série (u_n^3) est absolument convergente; et enfin que la série (u_n^2) diverge et que la suite de ses sommes partielles s_n a pour valeurs d'adhérence tous les points d'un intervalle fermé (non réduit à un point de **R**). Il résulte alors de la relation :

$$\alpha = \text{Log}\,(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3}(1+\varepsilon(u)), \qquad \text{où} \lim_{u \to 0} \varepsilon(u) = 0,$$

que la suite des produits partiels $\prod_1^n (1+u_p)$ a pour valeurs d'adhérence dans **C** les points d'un intervalle borné appartenant à une droite passant par 0.

Produits et familles multipliables de fonctions. — La définition 11-*1* de la sommabilité uniforme d'une famille de fonctions à valeurs dans un groupe G s'applique immédiatement, ainsi que ses conséquences, au cas où G est le groupe **C***.

Nous allons étudier maintenant une condition suffisante de multipliabilité uniforme, en la formulant de façon à englober des applications à valeurs dans **C**, et non plus seulement dans **C***.

Définition 12-*7*. — SOIT X UN ENSEMBLE QUELCONQUE, ET SOIT $(u_\iota)_{\iota \in I}$ UNE FAMILLE D'APPLICATIONS DE X DANS **C**.

ON DIT QUE LA FAMILLE DES FONCTIONS $(1+u_\iota)$ EST *NORMALEMENT MULTIPLIABLE* SI TOUTES LES FONCTIONS u_ι SONT BORNÉES ET SI LA FAMILLE DES u_ι EST NORMALEMENT SOMMABLE (C'EST-À-DIRE SI, EN POSANT $\|u_\iota\| = \sup_x |u_\iota(x)|$, LA FAMILLE DES $\|u_\iota\|$ EST SOMMABLE).

PROPOSITION 12-*8*. — *Soit $(1+u_\iota)_{\iota \in I}$ une famille normalement multipliable d'applications d'un ensemble X dans* **C**.

1° Pour tout $x \in X$ la famille des $(1+u_\iota(x))$ est multipliable dans **C** *et son produit $p(x)$ n'est nul que si l'un des $(1+u_\iota(x))$ est nul.*

2° Le produit p est limite uniforme sur X des produits finis p_J (suivant la base de filtre $\mathscr{B}$ associée à I).

DÉMONSTRATION. — 1° Le premier énoncé résulte directement du théorème 12-*2*.

2° Par hypothèse la famille des $\|u_i\|$ est sommable (soit k sa somme) ; donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe J_0 fini $\subset$ I tel que, pour tout K fini disjoint de J_0 on ait :

$$\sum_{\iota \in K} |u_\iota(x)| \leqslant \sum_{\iota \in K} \|u_\iota\| \leqslant \varepsilon .$$

Les inégalités (*b*) et (*c*) de 12-*3* donnent donc :

$$|p_{J_0 \cup K}(x) - p_{J_0}(x)| = |p_{J_0}(x)| \,.\, |p_K(x) - 1| \leqslant \varepsilon e^{2k},$$

d'où après un passage à la limite :

$$|p_{J_0 \cup K}(x) - p(x)| \leqslant |p_{J_0 \cup K}(x) - p_{J_0}(x)| + |p(x) - p_{J_0}(x)| \leqslant 2\varepsilon e^{2k}.$$

Donc les p_J convergent uniformément vers p suivant $\mathscr{B}$.

COROLLAIRE 12-*9*. — *Si $(1 + u_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille normalement multipliable d'applications continues d'un espace topologique X dans* **C**, *le produit p de cette famille est borné et continu, et l'ensemble de ses zéros est la réunion des zéros des facteurs.*

EXEMPLE 10. — Soit a_n l'application de **C** dans **C** ainsi définie :

$$a_0(z) = z; \quad a_n(z) = 1 - z^2/n^2 \quad \text{pour tout } n > 0 .$$

Sur chacun des disques $\{z : |z| < \rho\}$ on a $|n^{-2} z^2| \leqslant n^{-2} \rho^2$, donc la famille des a_n est normalement multipliable sur chacun de ces disques. Son produit p est limite uniforme sur chacun de ces disques de produits finis de fonctions a_n, donc de polynômes en z; donc p est une fonction holomorphe dans **C**; l'ensemble de ses zéros est **Z**, et chacun d'eux est un zéro simple.

13. — Algèbres normées

Rappelons qu'on appelle *algèbre* sur le corps **K** tout anneau A muni d'une loi externe qui, à tout $(\lambda, x) \in \mathbf{K} \times A$ associe un élément λx de A, de telle sorte que :

1° A muni de l'addition et de cette loi externe soit un espace vectoriel sur **K**.

2° $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$.

L'algèbre A est dite commutative si la multiplication dans A est commutative.

Nous allons maintenant étudier les algèbres sur **K** qui sont munies d'une norme compatible avec la multiplication de A, en un sens que nous allons préciser.

Définition 13-*1*. — ON APPELLE *ALGÈBRE NORMÉE* SUR LE CORPS **K** TOUTE ALGÈBRE A SUR **K** MUNIE D'UNE NORME (SUR A CONSIDÉRÉ COMME ESPACE VECTORIEL) TELLE QUE

$$\|x \cdot y\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{POUR TOUS } x, y \in A.$$

ON DIT QUE CETTE ALGÈBRE NORMÉE EST *COMPLÈTE* (OU ENCORE DE BANACH) SI L'ESPACE VECTORIEL NORMÉ A EST COMPLET.

Exemples d'algèbres normées. — **13-*2*.** — **C** muni de la norme $\|x\| = |x|$ est une algèbre de Banach sur **C** et sur **R**.

13-*3*. — L'algèbre $\mathscr{M}^{(n)}$ des matrices carrées (x_{ij}) d'ordre n sur **K** est une algèbre normée pour la norme $\|M\| = \sum_{i,j} |x_{ij}|$, où x_{ij} désigne le terme général de M.

On vérifie aisément la condition de compatibilité avec la multiplication. Cette algèbre est complète puisque la dimension de l'espace vectoriel $\mathscr{M}^{(n)}$ est finie (égale à n^2).

13-*4*. — Soit E un espace vectoriel normé; l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E)$ des *endomorphismes* de E (c'est-à-dire des applications linéaires continues de E dans E) devient une algèbre lorsqu'on le munit du produit $f \circ g$ défini par $f \circ g(x) = f(g(x))$.

La norme dont nous l'avons muni (proposition 4-*6*) vérifie la relation

$$\|f \circ g\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\| \cdot$$

Donc $\mathscr{L}(E)$ muni de cette norme est une algèbre normée. Lorsque E est complet, cette algèbre est complète (voir proposition 4-*7*).

13-*5*. — L'espace vectoriel $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$ des applications bornées d'un ensemble X dans **C** est une algèbre pour la multiplication ordinaire définie par

$$fg(x) = f(x) \cdot g(x).$$

La norme de la convergence uniforme sur cet espace satisfait à la condition $\|fg\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$.

Cette algèbre normée est complète.

13-*6*. — Lorsque X est un espace topologique, la partie de $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$ constituée par les fonctions continues est une sous-algèbre de $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$; elle est fermée dans cette dernière, donc aussi complète.

A toute partie Y de X on peut aussi associer la partie de $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$ constituée par les fonctions continues qui s'annulent sur Y; c'est une sous-algèbre complète de la précédente.

13-*7*. — L'espace vectoriel $\mathscr{D}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ des fonctions numériques continues à support compact est muni d'une structure d'algèbre par le produit ordinaire (défini par $fg(x) = f(x) \cdot g(x)$). Mais il peut être aussi muni d'une autre structure d'algèbre importante, grâce au *produit de convolution* $f * g$ ainsi défini :

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-t) g(t) \, dt .$$

On vérifiera que $f * g$ appartient bien à $\mathscr{D}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, que le produit de convolution est associatif et commutatif, et que l'application $(f, g) \longrightarrow f * g$ est bilinéaire.

Si l'on pose

$$\|f\| = \int_{\mathbf{R}} |f(t)| \, dt ,$$

l'espace vectoriel $\mathscr{D}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ devient un espace normé, d'ailleurs non complet; vérifions que sa norme est compatible avec le produit de convolution, c'est-à-dire que $\|f * g\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$:

$$\|f * g\| \leqslant \int_{\mathbf{R}^2} |f(x-t) g(t)| \, dt \, dx = \int_{\mathbf{R}^2} |f(u) g(v)| \, du \, dv = \|f\| \cdot \|g\| .$$

13-*8*. — Voici un exemple analogue, dans lequel $\mathbf{R}$ est remplacé par $\mathbf{Z}$, et la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}$ par la mesure m sur $\mathbf{Z}$ pour laquelle on a : $m(X) =$ nombre cardinal de X (pour tout X fini $\subset \mathbf{Z}$) :

Soit A l'espace vectoriel des applications $a : n \longrightarrow a_n$ de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{R}$ telles que $\Sigma |a_n| < \infty$; si l'on pose $\|a\| = \Sigma |a_n|$, l'espace A devient un espace normé, qui est complet d'après la proposition 8-9.

Pour tous a, $b \in$ A, définissons le produit de convolution $c = a * b$ par la relation :

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j .$$

Comme les familles (a_i), (b_j) sont absolument sommables, il en est de même de la famille des produits $a_i b_j$, donc aussi de chacune de ses sous-familles; ceci montre, d'une part, que c_n est bien défini pour tout n, d'autre part que

$$\sum |c_n| \leqslant (\sum |a_n|) (\sum |b_n|) .$$

Autrement dit, $a * b$ est bien un élément de A, et $\|a * b\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|$. Enfin le produit de convolution est associatif (et commutatif), et l'application $(a, b) \longrightarrow a * b$ est bilinéaire; on a donc bien défini sur A une structure d'algèbre normée complète.

Cette algèbre A contient comme sous-algèbre fermée l'espace l^1 des familles sommables (a_n) telles que $a_n = 0$ pour tout $n < 0$.

13-*9*. — Soit Δ le disque fermé $\{z : |z| \leqslant 1\}$ de $\mathbf{C}$; et soit $\mathscr{H}(\Delta)$ le sous-espace de $\mathscr{C}(\Delta, \mathbf{C})$ constitué par les fonctions holomorphes à l'intérieur de Δ. C'est une sous-algèbre importante de l'algèbre de Banach $\mathscr{C}(\Delta, \mathbf{C})$; le fait que toute limite uniforme de fonctions holomorphes est holomorphe entraîne que cette algèbre est fermée dans $\mathscr{C}(\Delta, \mathbf{C})$, donc complète.

13-*10*. — L'espace vectoriel $\mathscr{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$ des fonctions numériques sur $[0, 1]$ qui ont une dérivée première continue est une algèbre quand on le munit du produit ordinaire.

Un calcul élémentaire montre que la norme

$$\|f\| = \sup_x |f(x)| + \sup_x |f'(x)|$$

(pour laquelle cet espace est complet) est compatible avec le produit défini sur cette algèbre.

REMARQUES — **13-*11*.** — Toute algèbre normée sur $\mathbf{C}$ est aussi une algèbre normée sur $\mathbf{R}$; ces deux algèbres sont simultanément complètes ou non complètes.

PROPOSITION **13-*12*.** — *Soit* A *une algèbre normée.*

1° La multiplication de A *est continue.*

2° Pour tout polynôme formel $P(X) = \sum a_n X^n$ *à coefficients dans* $\mathbf{K}$ *(ou dans* A*), l'application* $x \longrightarrow P(x)$ *de* A *dans* A *est continue, et*

$$\|P(x)\| \leqslant \sum \|a_n\| \cdot \|x\|^n .$$

En effet, xy est fonction bilinéaire sur A ; la proposition 6-*1* montre qu'elle est continue, puisque $\|xy\| \leqslant \|x\| . \|y\|$.

On en déduit, en faisant $x = y$, puis par récurrence, que pour tout entier n, et pour tout $a \in \mathbf{K}$ ou dans A, l'application $x \longrightarrow ax^n$ est continue, et que de plus $\|ax^n\| \leqslant \|a\| . \|x\|^n$.

On en déduit aussitôt la majoration de $\|P(x)\|$, et la continuité de l'addition démontre enfin la continuité de $P(x)$.

13-*13*. — Soit A un espace vectoriel normé ; et supposons A muni d'une multiplication qui fasse de A une algèbre ; ce n'est pas nécessairement une algèbre normée ; mais si la multiplication est continue, c'est-à-dire si l'application $(x, y) \longrightarrow xy$ de $A \times A$ dans A est continue, il résulte de la proposition 6-*1* qu'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\|x \cdot y\| \leqslant k \|x\| \cdot \|y\| .$$

Si l'on pose alors $p(x) = k\|x\|$, p est une norme sur A équivalente à la norme initiale, et d'autre part on vérifie que :

$$p(x \cdot y) = k \| x \cdot y \| \leqslant k^2 \| x \| \cdot \| y \| = p(x) p(y).$$

Donc la nouvelle norme est compatible avec la multiplication.

Par exemple, si dans l'algèbre $\mathscr{M}^{(n)}$ des matrices carrées d'ordre n, on pose $\|M\| = \sup\limits_{i,j} |x_{ij}|$, la norme obtenue n'est pas compatible avec la multiplication, mais son produit par n l'est.

Norme de l'unité. — **13**-*14*. — Rappelons qu'on appelle *unité* d'une algèbre A tout élément e de A tel que pour tout $x \in A$, on ait

$$e \cdot x = x \cdot e = x.$$

S'il existe un tel x il est unique; mais il peut ne pas exister; on pourra, dans les exemples qui précèdent, déterminer les cas où existe une unité.

Lorsque A possède une unité on convient, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, de noter λ l'élément λe de A. Cette convention est justifiée par le fait que l'application $\lambda \longrightarrow \lambda e$ de $\mathbf{K}$ dans E est injective, et par la relation $\lambda x = (\lambda e) x$ pour tout $x \in A$.

Lorsque A possédera une unité, les séries formelles (sur $\mathbf{K}$) qu'on utilisera seront de la forme $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n X^n$; sinon on supposera que $a_0 = 0$.

Lorsqu'une algèbre normée A admet une unité e, la relation $e = e \cdot e$ entraîne $\|e\| \leqslant \|e\|^2$, d'où $\|e\| \geqslant 1$. Dans la plupart des exemples précédents, on a $\| e \| = 1$; toutefois il peut arriver, comme dans l'exemple 13-*3*, que $\|e\| \neq 1$; mais nous allons voir qu'on peut alors remplacer la norme de A par une norme p équivalente (au sens de l'équivalence des normes sur un espace vectoriel) qui soit encore compatible avec la multiplication, et telle que $p(e) = 1$:

Pour tout $a \in A$, désignons par $\bar{a}$ l'application linéaire $x \longrightarrow a \cdot x$ de A dans A; c'est un élément de $\mathscr{L}(A)$ puisque $\|a \cdot x\| \leqslant \|a\| \cdot \|x\|$, et l'application $a \longrightarrow \bar{a}$ de A dans $\mathscr{L}(A)$ est linéaire; donc si on pose $p(a) = \|\bar{a}\|$, p est une semi-norme sur A.

La relation $\|ax\| \leqslant \|a\| \cdot \|x\|$ montre que

$$p(a) = \| \bar{a} \| \leqslant \| a \| ;$$

mais d'autre part

$$p(a) \geqslant \| e \|^{-1} \cdot \| a \cdot e \| = \| e \|^{-1} \cdot \| a \|,$$

d'où :

$$\| e \|^{-1} \cdot \| a \| \leqslant p(a) \leqslant \| a \|.$$

Cette relation montre que p est une norme sur A équivalente à la norme initiale. L'algèbre A munie de cette norme est isomorphe à la sous-algèbre de $\mathscr{L}(A)$ constituée par les éléments $\bar{a}$; on a donc bien $p(a \cdot b) \leqslant p(a) p(b)$, et $p(e) = 1$.

Notons enfin qu'il peut exister sur une même algèbre plusieurs normes équivalentes compatibles avec la multiplication et telles que $\|e\| = 1$; par exemple, si E désigne un espace vectoriel de dimension finie, la norme que nous avons adoptée sur l'algèbre A $= \mathscr{L}$(E) vérifie les conditions requises, et elle varie avec la norme choisie sur E.

Produit de deux familles absolument sommables. — PROPOSITION **13**-*15*. — *Si $(a_\iota)_{\iota \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ désignent deux familles absolument sommables d'éléments d'une algèbre de Banach, de sommes respectives α et β, la famille des produits $(a_\iota b_j)$ est aussi absolument sommable, et de somme $\alpha \cdot \beta$.*

Cet énoncé, qui généralise le corollaire 9-*22*, résulte comme lui de la proposition 9-*21*, puisque l'application $(x, y) \longrightarrow x \cdot y$ de $A \times A$ dans A est, d'une part bilinéaire, d'autre part continue puisque $\|x \cdot y\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

Séries entières dans une algèbre de Banach. — **13**-*16*. — Dans une algèbre A sur **K** on peut faire des additions, des multiplications; donc à tout polynôme formel P(X) à coefficients dans **K** on peut associer l'application $x \rightarrow P(x)$ de A dans A. Si A est une algèbre normée, on peut faire des passages à la limite, donc on peut espérer pouvoir définir la somme d'une série entière à coefficients dans **K** (et même à coefficients dans A lorsque A est commutative).

Si $a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n + \ldots$ désigne une série formelle en X, à coefficients dans **K**, nous appellerons *rayon de convergence* de cette série formelle l'élément ρ de $\overline{\mathbf{R}}_+$ défini par :

$$1/\rho = \overline{\lim_{n \to \infty}} \, |a_n|^{1/n}.$$

Cette définition est justifiée par le fait bien connu, que si x désigne un élément de **K**, la série $(a_n x^n)$ est convergente lorsque $|x| < \rho$, et divergente lorsque $|x| > \rho$.

Nous allons retrouver une partie de ces conclusions dans les algèbres de Banach. Toutes les algèbres A dont il s'agira maintenant seront supposées munies d'une unité, notée e, et nous identifierons l'élément λ de **K** à l'élément λe de A.

PROPOSITION **13**-*17*. — *Soit* A *une algèbre de Banach sur* **K**, *et soit* $(a_n X^n)$ *une série entière formelle (sur* **K**), *de rayon de convergence* $\rho > 0$.

Pour tout nombre positif $r < \rho$, la série $(a_n x^n)$ est convergente et normalement convergente dans la boule $\{x : \|x\| \leqslant r\}$. Sa somme $f(x)$ est continue dans la boule ouverte $\{x : \|x\| < \rho\}$.

DÉMONSTRATION. — Soit r' un nombre quelconque tel que $r < r' < \rho$. Pour tout n assez grand, on a :

$$|a_n|^{1/n} \leqslant 1/r';$$

donc si $\|x\| \leqslant r$, on a :

$$\|a_n x^n\| \leqslant |a_n| r^n \leqslant (r/r')^n .$$

La série géométrique de terme général $(r/r')^n$ étant convergente, la série $(a_n x^n)$ est normalement convergente dans la boule $\{x : \|x\| \leqslant r\}$; et comme A est complet, elle est convergente.

Chacun des termes $a_n x^n$ de la série est continu, donc la convergence normale entraîne que la somme f de cette série est continue sur chaque boule ouverte $\{x : \|x\| < r\}$, donc aussi sur la boule ouverte $\{x : \|x\| < \rho\}$.

Remarque 13-*18*. — Contrairement à ce qui se produit dans le cas classique où A est le corps $\mathbf{C}$ lui-même, on ne peut pas affirmer que lorsque $\|x\| > \rho$, la série $(a_n x^n)$ diverge; ceci tient essentiellement à ce que l'on peut avoir $\|x^n\| < \|x\|^n$, tandis que dans $\mathbf{C}$ on a $\|x^n\| = \|x\|^n$.

Par exemple, s'il existe un $u \neq 0$ tel que $u^n = 0$ pour tout $n \geqslant 2$ (ce qui arrive en particulier dans l'algèbre $\mathscr{M}^{(2)}$ des matrices d'ordre 2), la série $(a_n x^n)$ converge évidemment lorsque $x = ku$, même lorsque $\|ku\| > \rho$.

Proposition **13**-*19*. — *Soient $(a_n X^n)$ et $(b_n X^n)$ deux séries entières formelles en X, de rayons de convergence α et β; et soit $(c_n X^n)$ leur produit formel (défini par $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$).*

Si A est une algèbre de Banach, pour tout $x \in$ A tel que $\|x\| < \inf(\alpha, \beta)$ la série $(c_n x^n)$ est absolument convergente et les sommes $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ de ces séries vérifient la relation :

$$C(x) = A(x) \cdot B(x) = B(x) \cdot A(x) .$$

Démonstration. — Si $\|x\| < \alpha$ et β, chacune des séries $(a_n x^n)$ et $(b_n x^n)$ est absolument convergente; donc (voir proposition 13-*15*) la famille des produits $a_p b_q x^{p+q}$ est absolument sommable et sa somme est égale au produit $A(x) B(x)$; comme $a_p b_q x^{p+q} = b_q a_p x^{q+p}$, cette somme est aussi égale à $B(x) A(x)$. L'associativité de la somme permet alors de grouper ensemble les termes $a_p b_q x^{p+q}$ de degré $(p+q) = n$, dont la somme n'est autre que $c_n x^n$; d'où le résultat cherché.

Corollaire **13**-*20*. — *Soit A une algèbre de Banach avec unité. Pour tout $x \in$ A tel que $\|x\| < 1$, $(e-x)$ est inversible et a pour inverse l'élément $(e+x+\ldots+x^n+\ldots)$.*

En effet, prenons pour série $(a_n X^n)$ le polynôme $(1-X)$, et pour série $(b_n X^n)$ la série $(1+X+\ldots+X^n+\ldots)$; le produit formel de ces deux séries est la constante 1.

D'autre part $\alpha = +\infty$, $\beta = 1$; d'où le corollaire, d'après la proposition 13-*19*.

L'identité classique : $(1-x)(1+x+\ldots+x^n) = (1-x^{n+1})$ donne d'ailleurs une démonstration directe du corollaire.

L'exponentielle sur une algèbre de Banach avec unité. — La série formelle $(X^n/n\,!)$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$. Donc si A est une algèbre de Banach, la série $(x_n/n\,!)$ est absolument convergente dans A tout entier ; on désigne sa somme par $\exp x$ ou e^x, et l'application $x \longrightarrow \exp x$ s'appelle l'*exponentielle* ; elle est continue.

PROPOSITON 13-*21*. — *Si x et y sont deux éléments* permutables *quelconques de* A, *on a :*

$$\exp(x+y) = (\exp x)\cdot(\exp y) = (\exp y)\cdot(\exp x).$$

DÉMONSTRATION.— Les familles $(x^p/p!)$ et $(y^q/q!)$ étant absolument sommables, la famille des produits $(x^p y^q/p!\,q!)$ l'est aussi, et a pour somme $(\exp x)\cdot(\exp y)$; comme $x^p y^q = y^q x^p$, cette somme est aussi égale à $(\exp y)\cdot(\exp x)$.

En outre la commutativité de x, y entraîne, pour tout $n \geqslant 0$:

$$\sum_{p+q=n} \frac{x^p y^q}{p!\,q!} = \frac{1}{n!} \sum_{p+q=n} \frac{(p+q)!}{p!\,q!} x^p y^q = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

L'associativité de la somme des $x^p y^q/p!\,q!$ permet donc d'écrire :

$$(\exp x)\cdot(\exp y) = \sum_n \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y).$$

COROLLAIRE 13-*22*. — *Pour tout* $x \in$ A, *et pour tous* λ, $\mu \in$ **K**, *on a :*

$$\exp\big((\lambda+\mu)x\big) = (\exp \lambda x)\cdot(\exp \mu x).$$

COROLLAIRE 13-*23*. — *Pour tout* $x \in$ A, $\exp x$ *est inversible et a pour inverse* $\exp(-x)$.

Le groupe des éléments inversibles d'une algèbre de Banach. — Comme dans tout anneau, l'ensemble des éléments inversibles d'une algèbre A constitue un groupe G pour la multiplication, dont l'élément neutre est l'unité de A.

Lorsque A est une algèbre de Banach, on peut préciser la structure de G.

PROPOSITION 13-*24*. — *Soit* A *une algèbre de Banach avec unité.*

1° Le groupe G *des éléments inversibles de* A *est un ouvert de* A.

2° La topologie de G *induite par celle de* A *est compatible avec la structure de groupe de* G.

DÉMONSTRATION.— 1° D'après le corollaire 13-*20*, G contient la boule ouverte V de centre e et de rayon 1; pour tout $a \in$ G, l'application $x \longrightarrow ax$ est une homéomorphie de A sur lui-même, donc aV est un ouvert contenant

a; or tous les éléments de aV sont inversibles, donc $aV \subset G$. Donc G est réunion des ouverts aV; il est donc ouvert.

2° La multiplication est continue dans A; il nous reste donc à montrer que l'application $x \longrightarrow x^{-1}$ est continue dans G :

Le corollaire 13-*20* montre que cette application est continue au point $x = e$; pour montrer sa continuité en tout point $a \in G$, écrivons x^{-1} sous la forme : $x^{-1} = a^{-1}v$, où $v = u^{-1}$ et $u = xa^{-1}$.

L'application $x \longrightarrow u$ est continue et $u(a) = e$; l'application $u \longrightarrow v$ est continue pour $u = e$; et l'application $v \longrightarrow a^{-1}v$ est continue; donc l'application $x \longrightarrow x^{-1}$ est continue au point $x = a$.

Exemple. — Soit E un espace normé complet; l'algèbre $\mathscr{L}(E)$ est alors complète; donc l'ensemble des éléments inversibles de $\mathscr{L}(E)$ est ouvert. On retrouve ainsi un résultat noté lors de l'étude de la stabilité des isomorphismes de E sur lui-même.

IV. — ESPACES DE HILBERT

Les espaces vectoriels normés qui se sont imposés les premiers à l'attention des mathématiciens sont, mis à part les espaces euclidiens $\mathbf{R}^n$, ceux dont la norme ressemble à la norme euclidienne de $\mathbf{R}^n$: Ce sont les espaces de Hilbert, ainsi nommés d'après celui qui en donna les premiers exemples et en tira des applications importantes à l'Analyse.

Les premiers mathématiciens qui utilisèrent ces espaces apprécièrent surtout la commodité des calculs et la grande analogie entre la géométrie de ces espaces et celle des espaces euclidiens de dimension finie. Mais leur intérêt n'a pas diminué et maintenant encore ce sont les espaces les plus utilisés dans l'Analyse fonctionnelle et dans les théories physiques.

14. — Définition et propriétés élémentaires des espaces préhilbertiens

***Formes hermitiennes* 14-*1*.** — La norme euclidienne de $\mathbf{R}^3$ est liée au produit scalaire traditionnel $(x|y) = \Sigma x_i y_i$ par la relation $\|x\|^2 = (x|x)$. Si l'on veut introduire des notions analogues dans $\mathbf{C}^3$ en posant $(x|y) = \Sigma x_i y_i$, on se heurte à une double difficulté : D'une part il existe dans $\mathbf{C}^3$ des $x \neq O$ pour lesquels $(x|x) = 0$; et d'autre part $(x|x)$ n'est pas positif. Donc la forme bilinéaire $(x|y)$ sur $\mathbf{C}^3$ ne peut pas être utilisée pour définir une norme sur $\mathbf{C}^3$.

Mais si l'on remarque que la norme classique de $\mathbf{C}$ a un carré qui s'écrit $\|x\|^2 = x\bar{x}$, il devient naturel de définir une norme sur $\mathbf{C}^3$ en posant $\|x\|^2 = \Sigma x_i \bar{x}_i$; si l'on convient alors d'appeler produit scalaire de $\mathbf{C}^3$ la fonction $(x|y) = \Sigma x_i \bar{y}_i$, on retrouve la relation commode $\|x\|^2 = (x|x)$.

Le nouveau produit scalaire $(x|y)$ est encore linéaire par rapport à x

mais il est semi-linéaire par rapport à y (on appelle *semi-linéaire* toute application f d'un espace vectoriel dans un autre, qui est additive et telle que $f(\lambda x) = \bar{\lambda} f(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$).

Nous allons étudier systématiquement de tels produits scalaires.

Définition 14-2. — SOIT E UN ESPACE VECTORIEL SUR **K**. ON APPELLE *FORME HERMITIENNE* SUR E TOUTE APPLICATION φ DE $E \times E$ DANS **K** TELLE QUE :

1° POUR TOUT $y \in E$, L'APPLICATION $x \longrightarrow \varphi(x, y)$ EST UNE FORME LINÉAIRE SUR E;

2° POUR TOUS $x, y \in E$, ON A $\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$.

La condition (2) s'appelle *symétrie hermitienne*; elle entraîne que $\varphi(x, x)$ est réel; lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, ce n'est autre que la symétrie ordinaire.

Les propriétés (1) et (2) entraînent :

$$\varphi(x, y_1 + y_2) = \overline{\varphi(y_1 + y_2, x)} = \overline{\varphi(y_1, x)} + \overline{\varphi(y_2, x)} = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2);$$
$$\varphi(x, \lambda y) = \overline{\varphi(\lambda y, x)} = \bar{\lambda} \cdot \overline{\varphi(y, x)} = \bar{\lambda} \cdot \varphi(x, y).$$

Donc φ est semi-linéaire par rapport à y.

EXEMPLES. — 1° Nous allons déterminer toutes les formes hermitiennes sur un espace E de dimension n sur **K** : Soit (a_i) une base de E; et désignons par (x_i), (y_i) les coordonnées de deux points x, y de E par rapport à cette base.

Si φ est une forme hermitienne sur E, on a :

$$\varphi(x, y) = \varphi\left(\sum x_i a_i, \sum y_i a_i\right) = \sum x_i \bar{y}_j \varphi(a_i, a_j).$$

Si l'on pose $\alpha_{ij} = \varphi(a_i, a_j)$, la symétrie hermitienne entraîne $\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$.

Inversement, pour tout système de n^2 nombres complexes α_{ij} tels que $\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$, la fonction $\varphi(x, y) = \Sigma \alpha_{ij} x_i \bar{y}_j$ est une forme hermitienne sur E.

2° Soit E l'espace vectoriel $\mathscr{C}^1([0, 1], \mathbf{K})$, et soient α, β deux fonctions numériques continues à *valeurs réelles* sur $[0, 1]$.

Pour tous $x, y \in E$, posons

$$\varphi(x, y) = \int_0^1 \left(\alpha(t)\, x(t)\, \overline{y(t)} + \beta(t)\, x'(t)\, \overline{y'(t)}\right) dt.$$

La fonction φ est évidemment linéaire par rapport à x, et possède la symétrie hermitienne; donc φ est une forme hermitienne sur E.

Définition 14-3. — ON DIT QU'UNE FORME HERMITIENNE φ SUR E EST *POSITIVE* SI $\varphi(x, x) \geqslant 0$ POUR TOUT $x \in E$; ON DIT QU'ELLE EST *DÉFINIE POSITIVE* OU ENCORE *POSITIVE NON DÉGÉNÉRÉE* SI DE PLUS $\varphi(x, x) > 0$ POUR TOUT $x \neq 0$.

Il est évident que toute combinaison linéaire à coefficients positifs de formes hermitiennes positives est encore une telle forme.

EXEMPLES. — Dans l'exemple 1 ci-dessus, si $\alpha_{ij} = 0$ lorsque $i \neq j$, et $\alpha_{ii} \geqslant 0$ pour tout i, la forme φ est positive. Si en outre $\alpha_{ii} > 0$ pour tout i, elle est définie positive.

Dans l'exemple 2, si $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$, la forme φ est positive. Si en outre $\alpha > 0$ elle est définie positive; par contre si $\alpha = 0$ et $\beta > 0$, elle est dégénérée.

PROPOSITION **14-4**. — *Soit φ une forme hermitienne positive sur* E.

1° Pour tous $x, y \in$ E, on a

$$|\varphi(x, y)|^2 \leqslant \varphi(x, x) \cdot \varphi(y, y) \quad \textit{(inégalité de Cauchy-Schwarz).}$$

Si φ est définie positive, l'égalité n'a lieu que lorsque x et y sont linéairement dépendants.

2° L'application $x \longrightarrow (\varphi(x, x))^{\frac{1}{2}}$ est une semi-norme sur E*; c'est une norme lorsque φ est définie positive.*

DÉMONSTRATION. — 1° Nous allons utiliser le fait que, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $\varphi(\lambda x + y, \lambda x + y) \geqslant 0$; on a :

$$f(\lambda) = \varphi(\lambda x + y, \lambda x + y) = a\lambda\bar{\lambda} + b\lambda + \overline{b\lambda} + c \geqslant 0, \tag{1}$$

où l'on a posé :

$$a = \varphi(x, x), \qquad b = \varphi(x, y), \qquad c = \varphi(y, y).$$

Si $a = c = 0$, en faisant $\lambda = -\bar{b}$ dans (1); on obtient :

$$-2b\bar{b} \geqslant 0,$$

d'où $b = 0$, donc aussi $|b|^2 = ac$.

Sinon on a par exemple $a \neq 0$; faisons $\lambda = -\bar{b}a^{-1}$ dans (1); on obtient :

$$\frac{ac - b\bar{b}}{a} \geqslant 0,$$

d'où la relation cherchée puisque $a > 0$.

Supposons maintenant la forme φ définie positive; la relation $f(\lambda) = 0$ entraîne alors $\lambda x + y = O$; or si $|b|^2 = ac$ et $a \neq 0$, le calcul ci-dessus montre que pour $\lambda = -\bar{b}a^{-1}$ on a $f(\lambda) = 0$, d'où $\lambda x + y = O$; si $c \neq 0$ on a une relation analogue : $x + \mu y = O$; et si $a = c = 0$, on a $x = y = O$.

Inversement, lorsque x et y sont linéairement dépendants, il est immédiat que $|b|^2 = ac$

2° Posons $p(x) = (\varphi(x, x))^{\frac{1}{2}}$; la relation $p(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leqslant p(x) + p(y)$ s'écrit, après élévation au carré :

$$\varphi(x + y, x + y) \leqslant \varphi(x, x) + \varphi(y, y) + 2(\varphi(x, x) \cdot \varphi(y, y))^{\frac{1}{2}}$$

ou encore

$$2\mathcal{R}\varphi(x, y) = \varphi(x, y) + \overline{\varphi(x, y)} \leqslant 2(\varphi(x, x) \cdot \varphi(y, y))^{\frac{1}{2}},$$

ce qui résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

D'autre part la relation $\varphi(\lambda x, \lambda x) = |\lambda|^2 \varphi(x, x)$ montre que

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x);$$

donc p est une semi-norme ; c'est une norme lorsque $p^2(x) = \varphi(x, x)$ ne s'annule que pour $x = O$, donc lorsque φ est définie positive.

Définition 14-5. — ON APPELLE *ESPACE PRÉHILBERTIEN* TOUT ESPACE VECTORIEL E MUNI D'UNE FORME HERMITIENNE φ DÉFINIE POSITIVE, ET DE LA NORME ASSOCIÉE À φ PAR LA RELATION $\|x\|^2 = \varphi(x, x)$.

ON DIT QUE E EST UN *ESPACE DE HILBERT* LORSQUE L'ESPACE NORMÉ E EST COMPLET.

On notera en général $\varphi(x, y)$ par $(x|y)$, et on appellera $(x|y)$ le *produit scalaire* de x et y; au cours d'un calcul on simplifiera souvent les notations en notant $(x|y)$ par xy et $(x|x)$ par x^2.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, la trace sur F du produit scalaire de E est un produit scalaire sur F.

REMARQUE 14-6. — Si E est un espace préhilbertien sur $\mathbf{C}$, le produit scalaire $(x|y)$ prend des valeurs non réelles (sauf si E est réduit à O); donc ce n'est pas un produit scalaire sur E considéré comme espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. Par contre il est clair que $\mathscr{R}(x|y)$ est symétrique en x, y, et linéaire par rapport à x sur E considéré comme espace vectoriel sur $\mathbf{R}$; en outre $(x|x) = \mathscr{R}(x|x)$, donc $\mathscr{R}(x|y)$ est un produit scalaire sur l'espace réel E et les normes associées à $(x|y)$ et à $\mathscr{R}(x|y)$ sont identiques.

Nous aurons parfois l'occasion d'utiliser le produit scalaire $\mathscr{R}(x|y)$ qu'on appellera *produit scalaire réel associé à* $(x|y)$, ou plus simplement produit scalaire réel de E.

Exemples d'espaces préhilbertiens. — **14-7.** — L'espace vectoriel $E = \mathscr{C}([0, 1], \mathbf{C})$ muni du produit scalaire défini par

$$(x|y) = \int_0^1 x(t)\,\overline{y(t)}\,dt$$

est un espace préhilbertien complexe ; montrons qu'il n'est pas complet :

Posons $x_n(t) = \inf(n, t^{-1/3})$; on a :

$$\|x_n - x_{n+p}\|^2 = \int_0^1 |x_n(t) - x_{n+p}(t)|^2\,dt \leqslant \int_0^{\varepsilon_n} t^{-2/3}\,dt, \qquad \text{où } \varepsilon_n = 1/n^3.$$

Comme $\|x_n - x_{n+p}\|$ tend vers 0 quand $n \to \infty$, la suite (x_n) est une suite de Cauchy dans E; mais elle ne converge pas, car pour tout $x \in E$, on a :

$$\|x - x_n\|^2 \geqslant \int_{\varepsilon_n}^1 |x(t) - x_n(t)|^2\,dt = \int_{\varepsilon_n}^1 |x(t) - t^{-1/3}|^2\,dt.$$

Donc $$\liminf_{n\to\infty} \|x-x_n\|^2 \geqslant \int_0^1 |x(t)-t^{-1/3}|^2\, dt\,.$$

Or comme la fonction $t^{-1/3}$ n'est pas bornée sur $]0, 1]$, il existe un intervalle compact dans lequel $|x(t)-t^{-1/3}|^2 > 0$; donc l'intégrale de cette fonction est > 0; donc la suite (x_n) ne peut pas avoir x comme limite.

En fait la véritable limite de la suite (x_n) serait la fonction $t^{-1/3}$, qui appartient à un espace de Hilbert contenant E, à savoir l'espace des fonctions de carré sommable sur $[0, 1]$, qu'on étudiera avec la théorie de l'intégration.

14-*8*. — Nous allons voir que l'espace normé complet l^2_{I} défini précédemment (voir 8-*9*) est un espace de Hilbert; il suffit pour cela de démontrer que sa norme est associée à un produit scalaire.

Or, pour tous $x, y \in l^2_{\mathrm{I}}$, l'inégalité $2\,\Sigma\,|y_i y_i| \leqslant \Sigma\,(|x_i|^2+|y_i|^2)$ montre que la famille $(x_i\overline{y_i})$ est sommable.

Posons alors $(x\,|\,y) = \Sigma x_i\overline{y_i}$; c'est évidemment une forme hermitienne positive sur l^2_{I} et la relation $(x\,|\,x) = \Sigma\,|x_i|^2$ montre que la semi-norme associée à cette forme n'est autre que la norme de l^2_{I}.

L'importance des espaces l^2_{I} provient de la simplicité de définition de leur produit scalaire et du fait, qu'on établira plus loin (voir 16-*13*), que tout espace de Hilbert est isomorphe à un espace l^2_{I}. Lorsque $\mathrm{I} = \{1, 2, ..., n\}$, l^2_{I} n'est autre que l'espace $\mathbf{K}^n$, muni de la norme euclidienne si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, hermitienne si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$; lorsque $\mathrm{I} = \mathbf{N}$, l^2_{I} n'est autre que l'espace de Hilbert l^2.

Inégalités et identités utiles **14**-*9*. — 1° Avec les notations simplifiées introduites dans 14-*5*, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit

$$|xy|^2 \leqslant x^2\cdot y^2 \qquad \text{ou} \qquad |xy| \leqslant \|x\|\cdot\|y\|\,.$$

De cette inégalité et de l'inégalité $2\,ab \leqslant a^2+b^2$ (où a, $b \in \mathbf{R}$) résulte aussi

$$2\,|xy| \leqslant x^2+y^2\,. \tag{1}$$

Notons enfin l'inégalité

$$(x+y)^2 \leqslant 2(x^2+y^2)\,,$$

qui équivaut à la relation $0 \leqslant (x-y)^2$.

2° Des relations

$$(x+y)^2 = x^2+y^2+xy+yx\,; \qquad (x-y)^2 = x^2+y^2-xy-yx$$

résulte par addition l'identité importante suivante qui ne fait intervenir que les normes :

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2+2\,\|y\|^2\,. \tag{2}$$

On l'énonce parfois en disant que dans tout parallélogramme la somme des carrés des diagonales égale la somme des carrés des côtés.

3° Du développement de $(x+y)^2$ et $(x-y)^2$ on déduit par soustraction :

$$2(xy+yx) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 . \tag{3}$$

Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, on a $xy = yx$, d'où

$$4xy = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 .$$

Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, en remplaçant y par iy dans (3) on obtient :

$$2(xy-yx) = i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2) \tag{3'}$$

d'où en ajoutant (3) et (3') :

$$4xy = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2) . \tag{4}$$

Cette relation montre que le produit scalaire d'un espace préhilbertien est déterminé par sa norme.

***Isomorphisme de deux espaces préhilbertiens* 14-*10*.** — Soient E, F deux espaces préhilbertiens sur le même corps $\mathbf{K}$. On appelle *isomorphisme de* E *sur* F tout isomorphisme vectoriel f de E sur F qui conserve le produit scalaire, en ce sens que

$$(f(x)|f(y)) = (x|y) \quad \text{pour tous } x, y \in \mathrm{E} .$$

Cet isomorphisme conserve alors aussi la norme; donc E et F sont simultanément complets ou non complets.

Inversement, si f est un isomorphisme vectoriel qui conserve la norme, f conserve aussi le produit scalaire, d'après l'identité (4) du 14-9.

***Vecteurs orthogonaux.* — Définition 14-*11*.** — ON DIT QUE DEUX *ÉLÉMENTS* x, y D'UN ESPACE PRÉHILBERTIEN E SONT *ORTHOGONAUX* SI LEUR PRODUIT SCALAIRE $(x|y)$ EST NUL.

ON DIT QUE DEUX *PARTIES* X ET Y DE E SONT *ORTHOGONALES* SI TOUT ÉLÉMENT DE X EST ORTHOGONAL À TOUT ÉLÉMENT DE Y; CETTE RELATION SE NOTE $\mathrm{X} \perp \mathrm{Y}$.

Si $(x|y) = 0$, on a $(y|x) = \overline{(x|y)} = 0$, donc la relation d'orthogonalité est symétrique.

Comme la relation $(x|x) = 0$ entraîne $x = \mathrm{O}$, le seul vecteur orthogonal à lui-même est O; celui-ci est d'ailleurs aussi orthogonal à tout $x \in \mathrm{E}$.

Il en résulte par exemple que la relation d'orthogonalité entre sous-espaces vectoriels de E est symétrique, et que deux sous-espaces orthogonaux n'ont en commun que le point O. Donc dans $\mathbf{K}^n$ la somme des dimensions de deux sous-espaces orthogonaux est $\leqslant n$; ainsi dans $\mathbf{R}^3$ deux plans ne sont jamais orthogonaux (bien qu'ils puissent l'être au sens plus faible utilisé en géométrie élémentaire).

PLUS GÉNÉRALEMENT, ON DIT QUE DEUX *VARIÉTÉS AFFINES* X ET Y DE E SONT *ORTHOGONALES* SI LES SOUS-ESPACES VECTORIELS DE E RESPECTIVEMENT PARALLÈLES À X ET Y SONT ORTHOGONAUX.

PROPOSITION **14-*12***. (THÉORÈME DE PYTHAGORE). — *Soient x, y deux vecteurs d'un espace préhilbertien sur* **K**.

Si x, y sont orthogonaux, on a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Lorsque **K** = **R** *la réciproque est vraie.*

DÉMONSTRATION. — La relation $(x+y)^2 = x^2+y^2+xy+yx$ montre que si $xy = 0$, ce qui entraîne $yx = 0$, on a $(x+y)^2 = x^2+y^2$.

Inversement cette dernière relation entraîne $xy+yx = 0$; si **K** = **R**, on a en outre $xy = yx$, donc $2\,xy = 0$, d'où $xy = 0$.

Z Par contre si **K** = **C**, la relation $(x+y)^2 = x^2+y^2$ entraîne seulement $2\mathcal{R}(xy) = xy+yx = 0$, d'où l'orthogonalité de x, y relativement au produit scalaire *réel* de E.

Par exemple, dans **C** considéré comme espace vectoriel sur **C**, il n'existe aucun couple de vecteurs orthogonaux non nuls, et cependant on a

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

dès que les vecteurs $x = x_1+ix_2$, $y = y_1+iy_2$ vérifient la relation :

$$\mathcal{R}(xy) = x_1y_1 + x_2y_2 = 0\,.$$

LEMME **14-*13***. — *Dans tout espace préhilbertien, l'application* $(x, y) \longrightarrow (x|y)$ *de* E × E *dans* **K** *est continue.*

DÉMONSTRATION. — Que l'on ait **K** = **R** ou **C**, $(x|y)$ est toujours une forme bilinéaire sur E considéré comme espace vectoriel sur **R**. L'inégalité $|(x|y)| \leqslant \|x\|\cdot\|y\|$ montre donc, d'après la proposition 6-*1*, que cette fonction est continue dans E×E.

PROPOSITION **14-*14***. — *L'ensemble des vecteurs de* E *orthogonaux à un vecteur $a \neq$* O *est un hyperplan fermé.*

DÉMONSTRATION. — L'ensemble étudié est l'ensemble des zéros de la forme linéaire $f : x \longrightarrow (x|a)$, donc c'est un hyperplan; d'autre part cette forme linéaire f est continue, d'après le lemme 14-*13*, donc cet hyperplan $f^{-1}(0)$ est fermé.

COROLLAIRE **14-*15***. — *L'ensemble* X^0 *des vecteurs de* E *orthogonaux à un ensemble* X *est un sous-espace vectoriel fermé de* E *(éventuellement réduit à* O*).*

C'est immédiat puisque toute intersection de sous-espaces vectoriels fermés de E en est encore un.

Il est évident que ($X \subset Y$) entraîne ($X^0 \supset Y^0$); si donc on désigne par X^{00} l'ensemble $(X^0)^0$, on a aussi $X^{00} \subset Y^{00}$.

Notons aussi que $X \subset X^{00}$ puisque $X \perp X^0$.

Hyperplan médiateur de deux points **14-*16*.** — Soit E un espace préhilbertien sur **R**, et soient a, b deux points distincts de E. L'ensemble X des points x de E équidistants de a et b est défini par la relation :

$$(a-x)^2 = (b-x)^2 \qquad \text{ou encore } x(b-a) = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)\,.$$

Si l'on pose $x = y + \frac{1}{2}(b+a)$, cette relation devient $y(b-a) = 0$. Donc l'ensemble cherché est l'hyperplan affine orthogonal à $(b-a)$ et passant par le milieu des points a, b.

Lorsque E est préhilbertien sur **C**, on se ramène au cas précédent en munissant E de son produit scalaire réel; l'hyperplan réel X contient alors l'hyperplan affine complexe orthogonal à $(b-a)$ et passant par le milieu des points a, b, mais n'est pas identique à ce dernier.

Angle de deux vecteurs non nuls. — On démontre en géométrie élémentaire, que si x, y sont deux vecteurs non nuls de $\mathbf{R}^2$, on a la relation :

$$(x|y) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\theta\,,$$

où θ désigne l'angle des demi-droites d'origine O portant respectivement x et y.

Or si E est un espace préhilbertien réel, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que si x, y sont deux vecteurs non nuls de E on a :

$$-1 \leqslant \frac{(x|y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \leqslant 1\,.$$

D'autre part la théorie de la fonction cosinus, définie comme somme de la série de terme général $(-1)^n t^{2n}/2n!$ montre que pour tout $k \in [-1, 1]$, il existe un seul nombre réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos\theta = k$; on est donc conduit à la définition suivante :

Définition 14-*17*. — ON APPELLE *ANGLE* DE DEUX VECTEURS x, y NON NULS D'UN ESPACE PRÉHILBERTIEN RÉEL E LE NOMBRE RÉEL θ DÉFINI PAR LES RELATIONS :

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi\,; \qquad (x|y) = \|x\| \cdot \|y\| \cos\theta.$$

Dire que θ est aigu (resp. droit, obtus) équivaut à dire que $(x|y)$ est > 0 (resp. $= 0$, < 0).

La proposition 14-*4* montre que l'on n'a $|\cos\theta| = 1$ que lorsque x et y sont linéairement dépendants; lorsque $y = \lambda x$ avec $\lambda > 0$, $\theta = 0$; lorsque $y = \lambda x$ avec $\lambda < 0$, $\theta = \pi$.

Dans un espace préhilbertien sur **C**, le seul moyen d'introduire une notion

d'angle est de se ramener au cas réel, en utilisant le produit scalaire réel $\mathcal{R}(x|y)$; autrement dit on posera :

$$\mathcal{R}(x|y) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\theta.$$

Moyennant cette définition on pourra écrire, pour tous $x, y \neq 0$:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\theta.$$

Z Lorsqu'on utilisera les angles dans un espace préhilbertien *complexe*, il ne faudra pas oublier que la condition $\theta = \pi/2$ n'entraîne pas l'orthogonalité de x, y.

15. — Projection orthogonale. Etude du dual

On est souvent conduit, aussi bien dans des recherches théoriques qu'en Mathématiques appliquées, à des problèmes du type suivant :

Soient E un espace normé, X une partie de E, et x un point de E; trouver un point x' de X qui approxime le mieux possible x, autrement dit dont la distance à x soit égale à la distance $d(x, X)$ de x à X.

Un tel point x' sera appelé *projection* de x sur X.

Lorsque X est compact, ce problème possède au moins une solution (voir proposition 17-*4*, chapitre V); sinon il peut n'exister aucune solution.

Le théorème suivant fournit la réponse lorsque X est un sous-ensemble convexe complet d'un espace préhilbertien ; il joue un rôle fondamental en Analyse.

THÉORÈME **15**-*1*. — *Soit* E *un espace préhilbertien sur* **K**, *et soit* X *un sous-ensemble convexe complet de* E.

1° Tout point x *de* E *admet une projection unique* x' *(qu'on notera parfois* $P_X(x)$*) sur* X*;*

2° La projection x' *de* x *est caractérisée par la condition :*

$$\mathcal{R}\big((x-x')\,|\,(u-x')\big) \leqslant 0 \quad \text{pour tout } u \in X.$$

3° Pour tous $x, y \in$ E, *de projections* x', y' *sur* X, *on a :*

$$\|x'-y'\| \leqslant \|x-y\|.$$

DÉMONSTRATION. — 1° Posons $d = d(x, X)$; pour tout $\varepsilon > 0$, désignons par B_ε la boule fermée de centre x et de rayon $(d+\varepsilon)$; et posons $P_\varepsilon = X \cap B_\varepsilon$. L'ensemble des projections de x sur X n'est autre que l'intersection des P_ε ; il s'agit de montrer que cette intersection contient un point unique.

Tout P_ε est non-vide, et comme X et B_ε sont convexes, P_ε est convexe; donc pour tous $a, b \in P_\varepsilon$, le milieu m de (a, b) appartient à P_ε; or l'identité 14-*9*-2 permet d'écrire :

$$\|x-a\|^2 + \|x-b\|^2 = 2\,\|x-m\|^2 + \tfrac{1}{2}\,\|a-b\|^2.$$

Comme $\|x-a\|$, $\|x-b\|$, $\|x-m\|$ sont compris entre d et $d+\varepsilon$, on a donc :

$$\| a-b \|^2 \leqslant 2\left(2(d+\varepsilon)^2-2\,d^2\right)=4\,\varepsilon(2\,d+\varepsilon).$$

Cette inégalité fournit une majoration du diamètre de P_ε ; on voit que ce diamètre tend vers 0 avec ε.

D'autre part P_ε est une fonction croissante de ε, donc l'intersection des P_ε est égale à l'intersection de la suite décroissante (P_{ε_n}) où $\varepsilon_n = n^{-1}$; or les P_{ε_n} sont fermés dans X qui est supposé complet ; la proposition 20-6 du chapitre V montre donc que l'intersection des P_{ε_n} contient exactement un point.

2° Pour simplifier les calculs, ramenons-nous par translation au cas où $x' = O$.

Pour tout $u \in X$, et tout $\lambda \in]\,0, 1]$, on a $\lambda u \in X$; donc si O est la projection de x sur X, on a :

$$\| x \|^2 \leqslant \| x-\lambda u \|^2 \quad \text{ou} \quad 2\,\mathscr{R}(x|u) \leqslant \lambda\, \| u \|^2 .$$

Comme λ est arbitrairement petit, on a $\mathscr{R}\,(x\,|\,u) \leqslant 0$; ce n'est autre que la relation cherchée lorsqu'on y fait $x' = O$.

Inversement, si $\mathscr{R}(x\,|\,u) \leqslant 0$ pour tout $u \in X$, on a :

$$\| x-u \|^2=(x-u)^2=x^2-2\,\mathscr{R}(x|\,u)+u^2 \geqslant x^2=\| x \|^2 ,$$

donc O est bien la projection de x sur X.

3° Posons $\quad x-y=(x-x')+(x'-y')+(y'-y)=(x'-y')+u\,.$

On a $\qquad (x-y)^2=(x'-y')^2+u^2+2\,\mathscr{R}\,(u\,|\,(x'-y'))\,.$

Or $\qquad u(x'-y') = -(x-x')\,(y'-x')-(y-y')\,(x'-y')\,.$

La partie réelle du second membre est $\geqslant 0$, d'après l'énoncé (2) ; on a donc bien $(x-y)^2 \geqslant (x'-y')^2$.

Cette inégalité peut se traduire en disant que l'application P_X de E sur X est lipschitzienne de rapport 1.

Remarque. — L'énoncé (2) peut se traduire en termes d'angles ; en effet la relation $\mathscr{R}\left((x-x')\,|\,(u-x')\right) \leqslant 0$ exprime, lorsque $x \neq x'$ et $u \neq x'$, que l'angle des vecteurs $(x-x')$ et $(u-x')$ est $\geqslant \pi/2$.

Corollaire 15-2. — *Soit* X *un cône convexe complet d'un espace préhilbertien* E. *Si* x' *désigne la projection d'un point* x *sur* X, *on a :*

$$\| x \|^2=\| x' \|^2+\| x-x' \|^2 \qquad \text{et} \qquad \mathscr{R}(x|x')=(x'|x').$$

Démonstration. — Chacune de ces relations est équivalente à la relation $\mathscr{R}\,(x'\,|\,x-x') = 0$, que nous allons démontrer.

Comme X est un cône, on a $\lambda x' \in X$ pour tout $\lambda > 0$; on peut donc faire

$u = \lambda x'$ dans l'inégalité (2) du théorème 15-*1*; suivant que $\lambda < 1$ ou $\lambda > 1$, on trouve :

$$\mathcal{R}(x-x'|x') \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad \mathcal{R}(x-x'|x') \leqslant 0,$$

d'où l'égalité cherchée.

COROLLAIRE 15-*3*. — *Soit* X *un sous-espace vectoriel complet d'un espace préhilbertien* E, *et soit* $x \in$ E.

La projection x' *de* x *sur* X *est le seul point de* X *tel que* $(x-x')$ *soit orthogonal à* X.

DÉMONSTRATION. — Ramenons-nous par translation au cas où $x' = $ O (ce qui laisse X invariant).

1° Si O est la projection de x sur X, on a $\mathcal{R}(x|u) \leqslant 0$ pour tout $u \in$ X. Si v est un point quelconque de X, les points $-v$, iv, $-iv$ appartiennent aussi à X, donc la relation $\mathcal{R}(x|u) \leqslant 0$ est vérifiée lorsque $u = v$, $-v$, iv ou $-iv$; il en résulte que la partie réelle et la partie imaginaire de $(x|v)$ sont nulles, d'où $(x|v) = 0$.

2° Inversement, si $(x|v) = 0$ pour tout $v \in$ X, on a

$$\|x-v\|^2 = \|x\|^2 + \|v\|^2 \geqslant \|x\|^2,$$

donc O est la projection de x sur X.

COROLLAIRE 15-*4* (TRANSITIVITÉ DES PROJECTIONS). — *Soient* E *un espace préhilbertien,* F *un sous-espace vectoriel complet de* E, X *une partie convexe de* F, x *un point de* E *et* x' *sa projection sur* F.

Si x' *possède une projection* x'' *sur* X, *c'est aussi la projection de* x *sur* X; *et inversement.*

DÉMONSTRATION. — Comme $(x-x')$ est orthogonal à F, on a pour tout $y \in$ X :

$$\|x-y\|^2 = \|x-x'\|^2 + \|x'-y\|^2.$$

Donc les fonctions $\|x-y\|$ et $\|x'-y\|$ de la variable y atteignent simultanément leur minimum sur X; d'où l'énoncé.

REMARQUE 15-*5*. — Le corollaire 15-*4* s'étend, par translation, au cas où F est une variété affine complète de E.

Si donc $F_1, F_2, ..., F_n$ désigne une suite décroissante finie de variétés affines complètes de E, si x_1 désigne la projection de x sur F_1, et si x_p se définit par récurrence comme projection de x_{p-1} sur F_p, le point x_n coïncide avec la projection de x sur F_n. C'est l'extension d'un résultat classique de géométrie élémentaire dans $\mathbf{R}^3$.

Z L'énoncé 15-*4* ne serait pas exact si on y remplaçait le sous-espace F de E par une partie convexe complète quelconque de E.

Sous-espaces orthogonaux. — PROPOSITION 15-*6*. — *Soit* X *un sous-espace vectoriel complet d'un espace préhilbertien* E.

1° L'application P_X *de* E *sur* X *est une application linéaire et continue de norme* 1 (*si* $X \neq \{O\}$) ;

2° Le noyau $P_X^{-1}(O)$ *de cette application est le sous-espace* X^0 *orthogonal à* X, *et* $X^{00} = X$;

3° E *est somme directe de* X *et* X^0; *et pour tout* $x \in X$, *on a :*

$$\|x\|^2 = \|P_X(x)\|^2 + \|P_{X^0}(x)\|^2.$$

DÉMONSTRATION. — 1° Pour tous x, $y \in E$, et pour tout $u \in X$ on a d'après le corollaire 15-*3* :

$$(x - x')u = 0 \qquad \text{et} \qquad (y - y')u = 0.$$

D'où pour tous λ, $\mu \in \mathbf{K}$:

$$((\lambda x + \mu y) - (\lambda x' + \mu y'))\, u = 0.$$

D'après 15-*3*, $(\lambda x' + \mu y')$ est donc la projection de $(\lambda x + \mu y)$ sur X; autrement dit $P_X(\lambda x + \mu y) = \lambda P_X(x) + \mu P_X(y)$, d'où la linéarité de P_X.

La relation $\|x\|^2 = \|x'\|^2 + \|x - x'\|^2$ montre que P_X diminue les normes; d'autre part la restriction de P_X à X est l'identité, donc si $X \neq \{O\}$, on a $\|P_X\| = 1$.

2° Dire que $P_X(x) = O$ équivaut à dire que $(x - O)$ est orthogonal à X, d'après 15-*3*, donc $P_X^{-1}(O) = X^0$.

Pour tout x orthogonal à X^0, on a simultanément :

$$x'(x - x') = 0 \qquad \text{et} \qquad x(x - x') = 0,$$

d'où $(x - x')^2 = 0$, donc $x = x'$; autrement dit $x \in X$.

Ceci montre que $X^{00} \subset X$; mais on avait déjà l'inclusion inverse, donc $X^{00} = X$.

3° La relation $x = x' + (x - x')$, où $(x - x') \in X^0$ montre que $E = X + X^0$; et comme X et X^0 n'ont en commun que O, E est bien somme directe de X et X^0.

Enfin la relation $\|x\|^2 = \|P_X(x)\|^2 + \|P_{X^0}(x)\|^2$ résulte immédiatement de $x = x' + (x - x')$.

COROLLAIRE 15-*7* — *Pour tout sous-espace vectoriel* X *d'un espace de Hilbert* E, X^{00} *est la fermeture de* X.

DÉMONSTRATION. — Comme X^{00} est fermé et que $X \subset X^{00}$, on a aussi $\overline{X} \subset X^{00}$; d'autre part la relation $X \subset \overline{X}$ entraîne $X^{00} \subset (\overline{X})^{00} = \overline{X}$; d'où l'égalité cherchée.

Dual d'un espace de Hilbert. — Nous avons vu en 4-*8* que le dual topologique $E' = \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$ d'un espace normé E était un espace normé com-

plet. Nous allons voir que lorsque E est un espace de Hilbert, les espaces normés E et E′ sont isomorphes dans une isomorphie semi-linéaire remarquable. Cette propriété est l'une de celles qui expliquent le rôle important des espaces de Hilbert.

THÉORÈME 15-*8*. — *Soient* E *un espace de Hilbert et* E′ *son dual topologique.*
1° Pour tout $a \in E$ *la forme linéaire* $\varphi_a : x \longrightarrow (x|a)$ *est de norme* $\|a\|$.
2° L'application $a \longrightarrow \varphi_a$ *de* E *dans* E′ *est une isomorphie semi-linéaire des espaces normés* E, E′.

DÉMONSTRATION. — 1° L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que $\|\varphi_a\| \leqslant \|a\|$; d'autre part, pour $a \neq 0$, si $x = \|a\|^{-1}a$, $(x|a) = \|a\|$, donc $\|\varphi_a\| \geqslant \|a\|$; en résumé $\|\varphi_a\| = \|a\|$.

2° L'application $a \longrightarrow \varphi_a$ de E dans E′ est semi-linéaire, c'est-à-dire que :

$$\varphi_{a+b} = \varphi_a + \varphi_b\,; \qquad \varphi_{\lambda a} = \bar{\lambda}\varphi_a$$

c'est une conséquence du fait que $(x|a)$ est semi-linéaire par rapport à a.

D'autre part, l'application φ conserve la norme, donc est injective. Il nous reste à montrer qu'elle est surjective, c'est-à-dire que toute $u \in E'$ est de la forme φ_a :

Si $u = O$, c'est évident, avec $a = O$; si $u \neq O$, soit X l'hyperplan $u^{-1}(0)$; X est fermé, donc complet, donc d'après 15-6-*3*, on a $E = X + X^0$ et comme $X \neq E$, il existe dans X^0 un $b \neq O$. Les deux formes linéaires u et φ_b s'annulent sur l'hyperplan X et ne sont pas identiquement nulles, donc elles sont proportionnelles ; il existe donc un scalaire λ tel que $u(x) = \lambda(x|b)$ pour tout x, autrement dit $u = \varphi_a$, où $a = \bar{\lambda}b$.

Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, φ est évidemment une isomorphie au sens ordinaire.

EXEMPLES. — 1° Munissons $\mathbf{C}^n$ du produit scalaire canonique

$$(x|y) = \Sigma x_i \bar{y}_i\,.$$

Toute forme linéaire u sur $\mathbf{C}^n$ est de la forme $u(x) = \Sigma \alpha_i x_i$, c'est-à-dire encore $u(x) = (x|a)$, où a est le point de coordonnées $\bar{\alpha}_i$.

2° La proposition 15-*8* montre que toute forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert l^2_{I} s'écrit de façon unique sous la forme $x \longrightarrow \sum x_i \bar{a}_i$, où $\Sigma |a_i|^2 < \infty$.

REMARQUE 15-*9*. — La proposition 15-*8* ne peut s'étendre à aucun espace préhilbertien non complet E puisque E′, étant complet, ne peut pas être isomorphe à un espace E non complet.

Par exemple, soit E le sous-espace de l^2 constitué par les suites (x_n) (où $n \geqslant 1$) telles que $x_n = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices. Soit a le point de l^2 de coordonnées $a_n = n^{-1}$; la forme linéaire sur E défini par

$$x \longrightarrow (x|a) = \sum n^{-1} x_n$$

est continue, mais ne peut évidemment pas s'écrire sous la forme $(x|b)$ où $b \in$ E.

Topologie faible sur un espace de Hilbert. — Dans le numéro 3-*11* nous avons défini la topologie affaiblie d'un espace vectoriel topologique E. Lorsque E est un espace de Hilbert, pour tout $x \in$ E tel que $x \neq$ O, il existe une forme linéaire $u \in$ E′ telle que $u(x) \neq 0$ (par exemple $u = \varphi_x$); donc la topologie affaiblie de E est séparée.

De la proposition 15-*8* et du critère de convergence énoncé dans 3-*11* résulte le critère suivant :

PROPOSITION 15-*10*. — *Soient* E *un espace de Hilbert,* x_0 *un point de* E, *et* $\mathscr{B}$ *une base de filtre sur* E.

Dire que x_0 *est limite faible de* $\mathscr{B}$ *équivaut à dire que, pour tout* $a \in$ E,

$$(x_0|a) = \lim_{\mathscr{B}} (x|a).$$

Z Appelons *topologie forte* la topologie de E associée à la norme, et *topologie faible* de E sa topologie affaiblie.

Comme chacune des formes linéaires $x \longrightarrow (x|a)$ est continue, la convergence forte de $\mathscr{B}$ vers x_0 entraîne la convergence faible de $\mathscr{B}$ vers x_0. Il en résulte que si $\mathscr{B}$ converge faiblement vers x_0, $\mathscr{B}$ ne peut converger fortement vers aucun point $x'_0 \neq x_0$; mais il peut arriver que $\mathscr{B}$ ne converge pas fortement vers x_0. En voici un exemple dans l^2 :

Soit u_n le point de l^2 dont toutes les coordonnées sont nulles sauf celle d'indice n, qui vaut 1. Pour tout $a \in l^2$, la suite des $(u_n|a)$ tend vers 0, donc la suite (u_n) tend faiblement vers O; mais cette suite ne tend pas fortement vers O puisque pour tout n on a $\|u_n\| = 1$.

PROPOSITION 15-*11*. — *Soient* E *un espace de Hilbert,* x_0 *un point de* E *et* $\mathscr{B}$ *une base de filtre sur* E; *les énoncés suivants sont équivalents :*

1° $$x_0 = \lim_{\mathscr{B}} \text{forte}\ x;$$

2° $$\left(x_0 = \lim_{\mathscr{B}} \text{faible}\ x\right) \quad \text{et} \quad \|x_0\| = \lim_{\mathscr{B}} \|x\|.$$

DÉMONSTRATION. — L'implication $1 \Rightarrow 2$ est évidente; montrons la réciproque.

L'hypothèse entraîne que x_0^2 est limite de xx_0 (donc aussi de x_0x) et de x^2. Donc $(x_0^2 + x^2)$ et $(x_0x + xx_0)$ ont pour limite $2x_0^2$; on a donc :

$$\lim_{\mathscr{B}} (x_0 - x)^2 = \lim_{\mathscr{B}} \left(x_0^2 + x^2 - (x_0x + xx_0)\right) = 0\,.$$

Autrement dit $\mathscr{B}$ converge fortement vers x_0.

16. — Systèmes orthogonaux

La commodité des systèmes de coordonnées rectangulaires dans les espaces euclidiens $\mathbf{R}^n$ incite à chercher si l'on ne pourrait pas utiliser des systèmes analogues dans les espaces préhilbertiens; ce sont les systèmes orthogonaux et totaux qui vont jouer ce rôle.

Définition 16-*1*. — SOIT E UN ESPACE PRÉHILBERTIEN. ON APPELLE *SYSTÈME* (OU FAMILLE) *ORTHOGONAL* DANS E TOUTE FAMILLE $(a_i)_{i \in \mathrm{I}}$ D'ÉLÉMENTS DE E, NON NULS ET ORTHOGONAUX DEUX À DEUX.

UN SYSTÈME ORTHOGONAL (a_i) EST DIT *ORTHONORMAL* SI LA NORME DE TOUT a_i VAUT 1.

Un système orthonormal (a_i) est donc caractérisé par les relations :

$$(a_i \mid a_j) = \delta_{ij}\,,$$

où $\delta_{ij} = 0$ ou 1 suivant que $i \neq j$ ou $i = j$.

Il est immédiat que si (a_i) est un système orthogonal, le système $\|a_i\|^{-1} a_i$ est orthonormal.

Tout système orthogonal est algébriquement libre; en effet si $\sum_{i \in \mathrm{J}} \lambda_i a_i = \mathrm{O}$, où J est une partie finie de I, on a :

$$(\sum \lambda_i a_i)^2 = \sum |\lambda_i|^2 a_i^2 = 0\,,$$

d'où $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \mathrm{J}$.

Définition 16-*2*. — SOIT (a_i) UN SYSTÈME ORTHONORMAL DANS E. POUR TOUT $x \in \mathrm{E}$, ON APPELLE *COORDONNÉE D'INDICE* i DE x PAR RAPPORT À CE SYSTÈME, LE PRODUIT SCALAIRE $\xi_i = (x \mid a_i)$.

La coordonnée ξ_i de x ne dépend donc que de l'élément a_i et non pas des autres éléments du système.

PROPOSITION **16-*3*.** — *Soit* E *un espace préhilbertien. Pour tout système orthonormal* (a_i) *dans* E *et pour tout* $x \in \mathrm{E}$, *la famille des* $|\xi_i|^2$ *est sommable, et l'on a :*

$$\sum_i |\xi_i|^2 \leqslant \|x\|^2 \qquad \textit{(inégalité de Bessel).}$$

DÉMONSTRATION. — Il revient au même de démontrer que pour toute partie finie J de I on a :

$$\sum_{i \in \mathrm{J}} |\xi_i|^2 \leqslant \|x\|^2\,.$$

Or la relation $(\xi_i a_i \mid x - \xi_i a_i) = 0$ donne $(\xi_i a_i \mid x) = (x \mid \xi_i a_i) = |\xi_i|^2$, d'où

$$0 \leqslant (x - \sum_{i \in \mathrm{J}} \xi_i a_i)^2 = x^2 - \sum_{i \in \mathrm{J}} |\xi_i|^2\,,$$

d'où la relation cherchée.

On va maintenant caractériser les systèmes orthonormaux pour lesquels la somme des $|\xi_i|^2$ est égale à $\|x\|^2$.

Rappelons qu'une famille (a_i) d'éléments de E est dite *totale* si le sous-espace vectoriel de E qu'elle engendre est partout dense dans E, ou encore si tout élément de E est limite de combinaisons linéaires d'éléments a_i.

THÉORÈME 16-*4*. — *Soit* E *un espace préhilbertien, et soit* (a_ι) *un système orthonormal dans* E. *Les énoncés suivants sont équivalents :*

1° Pour tous x, $y \in$ E, *la famille des* $\xi_\iota \bar{\eta}_\iota$ *est sommable et de somme* $(x|y)$ *;*

2° Pour tout $x \in$ E, *on a* $\|x\|^2 = \sum |\xi_\iota|^2$ *(relation de Parseval) ;*

3° Pour tout $x \in$ E, *la famille* $(\xi_\iota a_\iota)$ *est sommable et de somme* x*;*

4° La famille (a_ι) *est totale dans* E.

DÉMONSTRATION. — $1 \Rightarrow 2$. — En effet (2) est un cas particulier de (1).

$2 \Rightarrow 3$. — La famille des $|\xi_i|^2$ ayant pour somme $\|x\|^2$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie finie J_0 de I telle que, pour tout J fini $\subset$ I contenant J_0, on ait :

$$\|x\|^2 - \sum_{\iota \in J} |\xi_\iota|^2 \leqslant \varepsilon^2 .$$

On a alors

$$(x - \sum_{\iota \in J} \xi_\iota a_\iota)^2 = \|x\|^2 - \sum_{\iota \in J} |\xi_\iota|^2 \leqslant \varepsilon^2 , \qquad \text{d'où} \quad \|x - \sum_{\iota \in J} \xi_\iota a_\iota\| \leqslant \varepsilon ,$$

ce qui démontre la propriété cherchée.

$3 \Leftarrow 4$. — Puisque pour tout $x \in$ E on a $x = \Sigma \xi_i a_i$, tout x est limite de sommes finies des $\xi_i a_i$, donc la famille (a_i) est totale.

$4 \Rightarrow 1$. — Soient $x \in$ E, et $\varepsilon > 0$; par hypothèse il existe une combinaison linéaire finie $y = \sum_{\iota \in J} \alpha_\iota a_i$ telle que $\|x - y\| \leqslant \varepsilon$; donc *a fortiori* la projection x' de x sur l'espace complet engendré par la famille finie $(a_\iota)_{\iota \in J}$ vérifie la relation $\|x - x'\| \leqslant \varepsilon$; or le vecteur $(x - \sum_{\iota \in J} \xi_i a_i)$ est orthogonal à chacun des a_i (où $i \in$ J), donc $x' = \sum_{\iota \in J} \xi_i a_i$.

On a donc :

$$0 \leqslant (x - \sum_{\iota \in J} \xi_\iota a_\iota)^2 = x^2 - \sum_{\iota \in J} |\xi_\iota|^2 \leqslant \varepsilon^2 .$$

Cette inégalité a lieu pour tout ε d'où, compte tenu de l'inégalité de Bessel :

$$\|x\|^2 = \sum_\iota |\xi_\iota|^2 = \sum_\iota \xi_\iota \bar{\xi}_\iota . \tag{1}$$

Si maintenant x, y sont deux éléments quelconques de E, de coordonnées (ξ_i) et (η_i), la sommabilité des $|\xi_i|^2$ et des $|\eta_i|^2$ entraîne celle des $\xi_i \bar{\eta}_i$ et des $\bar{\xi}_i \eta_i$; ceci permet d'utiliser la relation (1) pour exprimer, dans l'identité :

$$4\,xy = (x+y)^2 - (x-y)^2 + i\left((x+iy)^2 - (x-iy)^2\right)$$

tous les carrés en fonction des ξ_i et η_i; on trouve ainsi l'identité cherchée : $xy = \Sigma \xi_i \overline{\eta_i}$.

Définition 16-5. — DANS UN ESPACE PRÉHILBERTIEN E, TOUT SYSTÈME ORTHONORMAL QUI VÉRIFIE L'UN DES ÉNONCÉS DU THÉORÈME 16-*4* S'APPELLE UNE *BASE ORTHONORMALE* DE E.

***Extension des formules à une base orthogonale* 16-*6*.** — Il arrive souvent que la famille (a_i) qui se présente naturellement dans une théorie ne soit pas une base orthonormale, mais qu'il existe des scalaires $\lambda_i \neq 0$ tels que la famille des $b_i = \lambda_i a_i$ soit une base orthonormale.

On dira qu'une telle famille (a_i) est une *base orthogonale* de E. Dire qu'une famille (a_i) est de ce type équivaut évidemment à dire qu'elle est orthogonale et totale.

Les relations

$$x = \sum \xi_i b_i \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_i |\xi_i|^2 \qquad \text{où } \xi_i = (x|b_i)$$

deviennent alors :

$$x = \sum \alpha_i a_i \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum \|a_i\|^2 \cdot |\alpha_i|^2, \qquad \text{où} \quad \alpha_i = \frac{(x|a_i)}{\|a_i\|^2}.$$

Le scalaire α_i s'appelle *coefficient de Fourier* d'indice *i* de *x*, dans la base (a_i); plus généralement on convient d'appeler aussi coefficients de Fourier de *x* par rapport à un système orthogonal (a_i), total ou non, les scalaires $\alpha_i = (x|a_i)/\|a_i\|^2$.

Pratiquement on retrouve ces formules sans passer par l'intermédiaire des b_i; on écrit formellement :

$$x = \sum \alpha_i a_i, \qquad \text{d'où} \quad x^2 = (\sum \alpha_i a_i)^2 \quad \text{et} \quad x a_i = (\sum \alpha_i a_i)\, a_i.$$

Le développement formel de ces deux relations donne les formules écrites plus haut.

Z Il est essentiel de noter que, d'après la proposition 16-*13*, une « base orthonormale » (ou orthogonale) d'un espace de Hilbert E n'est une base algébrique de E que lorsque E est de dimension finie (voir aussi exercice 195).

Caractérisation des bases orthonormales dans un espace de Hilbert.

Définition 16-7. — SOIT E UN ESPACE PRÉHILBERTIEN. UN SYSTÈME ORTHONORMAL $(a_i)_{i \in I}$ DANS E EST DIT *MAXIMAL* SI TOUT SYSTÈME ORTHONORMAL QUI LE CONTIENT LUI EST IDENTIQUE.

Cette condition équivaut à dire que tout vecteur *x* orthogonal à tous les a_i est nul; autrement dit la condition $((x|a_i) = 0$ pour tout $i \in I)$ entraîne

($x = O$) ; ou encore, le seul vecteur x dont toutes les coordonnées ξ_i sont nulles est $x = O$.

PROPOSITION 16-*8*. — *Lorsque* E *est complet, les quatre énoncés équivalents du théorème* 16-*4* *sont équivalents au suivant :*

5° Le système orthonormal (a_i) *est maximal.*

DÉMONSTRATION. — 1° Si le système (a_i) vérifie l'énoncé 3, la relation $x = \Sigma\xi_i a_i$ montre que si tous les ξ_i sont nuls, $x = O$, donc le système est maximal.

2° Inversement, supposons le système (a_i) maximal; soit L l'espace vectoriel engendré par les a_i. Si l'on avait $\overline{L} \neq E$, la proposition 15-*6* montre qu'il existerait un vecteur $x \neq O$ et orthogonal à $\overline{L}$ donc aussi à chaque a_i, ce qui est impossible puisque (a_i) est maximal.

On a donc $\overline{L} = E$, autrement dit le système (a_i) est total.

Z La proposition 16-*8* ne s'étend pas aux espaces préhilbertiens non complets (voir exercices 197, 198, 199); ce qui ne veut pas dire d'ailleurs qu'un tel espace ne puisse pas posséder de base orthonormale.

Existence de bases orthonormales. — Les quatre énoncés du théorème 16-*4* montrent l'utilité des bases orthonormales pour la représentation des éléments d'un espace préhilbertien E. Il est donc important de connaître des conditions suffisantes pour l'existence d'une telle base.

Nous allons montrer, par des moyens différents, qu'une telle base existe dans les espaces E complets et dans les espaces E séparables.

LEMME 16-*9*. — *Tout système orthonormal d'un espace préhilbertien* E *est contenu dans un système orthonormal maximal.*

DÉMONSTRATION. — Rappelons d'abord qu'un ensemble ordonné A est dit *inductif* si toute partie totalement ordonnée de A est majorée par un élément de A ; et rappelons aussi l'énoncé du théorème de Zorn (équivalent à l'axiome du choix) :

« Dans un ensemble ordonné inductif A, tout élément de A est majoré par un élément maximal de A. »

Pour appliquer le théorème de Zorn, il sera commode ici de considérer un système orthonormal de E comme une partie de E (et non plus comme une partie indexée de E).

Si l'on ordonne par inclusion l'ensemble A des systèmes orthonormaux s de E, A devient un ensemble inductif; en effet, soit S une partie totalement ordonnée de A; la réunion $\widehat{S}$ des $s \in S$ est orthonormale, car si a_1, a_2 en sont deux éléments distincts appartenant respectivement à s_1, s_2 (où $s_1 \subset s_2$ par exemple), a_1 et a_2 appartiennent à s_2, donc sont orthogonaux. Donc $\widehat{S}$ est un

élément de A qui majore tout $s \in S$; on a donc bien montré que A est inductif, d'où le lemme.

PROPOSITION **16**-*10*. — *Tout espace de Hilbert* E *admet une base orthonormale.*

DÉMONSTRATION. — Le lemme 16-*9* montre que E contient un système orthonormal maximal, et celui-ci est une base orthonormale d'après la proposition 16-*8*.

Plus généralement il résulte des énoncés 16-*8* et 16-*9* que dans un espace de Hilbert tout système orthonormal, fini ou infini, est contenu dans une base orthonormale.

LEMME **16**-*11*. — *Soit* E *un espace préhilbertien, et soit* $(a_0, a_1 \ldots)$ *une suite, finie ou infinie, de vecteurs linéairement indépendants de* E*; et pour tout* n*, soit* L_n *le sous-espace de* E *engendré par* $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Si l'on pose $b_0 = a_0$ *et* $b_{n+1} = a_{n+1} - P_{L_n}(a_{n+1})$*, la suite* (b_n) *est un système orthogonal, et pour tout* n*, les vecteurs* $b_0, b_1, \ldots, b_n$ *engendrent* L_n.

DÉMONSTRATION. — Raisonnons par récurrence, en supposant démontré que $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ est un système orthogonal qui engendre L_n.

La relation $b_{n+1} = a_{n+1} - P_{L_n}(a_{n+1})$ montre que $b_{n+1} \neq O$ puisque a_{n+1} n'appartient pas à L_n, et b_{n+1} est orthogonal à L_n d'après le corollaire 15-*3*. Donc $(b_0, b_1, \ldots, b_{n+1})$ est un système orthogonal, et comme $a_{n+1} = b_{n+1} +$(un vecteur de L_n), ce système engendre le même espace que $(a_0, a_1, \ldots, a_{n+1})$.

La suite orthogonale (b_n) s'appelle *système orthogonal déduit de la suite* (a_n) *par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.*

Pratiquement, la détermination de la suite b_n se fait ainsi : Les b_i étant déterminés pour tout $i \leqslant n$, on pose :

$$b_{n+1} = a_{n+1} + \sum_1^n \lambda_i b_i .$$

Pour tout $i \leqslant n$, on a donc :

$$0 = (a_{n+1} | b_i) + \lambda_i (b_i | b_i) \qquad \text{d'où } \lambda_i .$$

Si l'on pose enfin $b'_n = \|b_n\|^{-1} b_n$, la suite (b'_n) est évidemment orthonormale.

PROPOSITION **16**-*12*. — *Tout espace préhilbertien* E *séparable (c'est-à-dire contenant une partie dénombrable partout dense) admet une base orthonormale, finie ou dénombrable.*

DÉMONSTRATION. — Par hypothèse il existe un sous-ensemble dénombrable D de E tel que $\overline{D} = E$. Numérotons les points de D en une suite (α_n) et désignons par (α_{i_n}) la sous-suite de cette suite constituée par les éléments

α_i qui ne sont pas combinaison linéaire d'éléments α_j d'indice $j < i$. Par construction les α_{i_n} sont linéairement indépendants et une récurrence facile montre que tout α_i est combinaison linéaire d'éléments α_{i_n}, donc la suite (α_{i_n}) est totale dans E.

La suite déduite de la suite (α_{i_n}) par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt est totale puisqu'elle engendre le même espace vectoriel que la suite (α_{i_n}) ; c'est donc une base orthogonale de E; on en déduit aussitôt une base orthonormale.

Les énoncés 16-*11* et 16-*12* ont une grande importance pour la représentation des fonctions; l'étude des séries de Fourier et des polynômes orthogonaux en fournira une illustration.

Isomorphie des espaces de Hilbert. — PROPOSITION **16-*13***. — *Soit* E *un espace préhilbertien muni d'une base orthonormale* $(a_i)_{i\in I}$. *Si pour tout* $x \in$ E, *on désigne par* ξ_i *sa coordonnée d'indice i dans cette base, l'application* $f: x \longrightarrow (\xi_i)$ *de* E *dans* l^2_I *est une isomorphie de* E *sur un sous-espace vectoriel partout dense de* l^2_I. *Lorsque* E *est complet, cette application est une isomorphie de* E *sur* l^2_I.

DÉMONSTRATION. — Le théorème 16-*4* montre que pour tout $x \in$ E, $\|x\|^2 = \sum |\xi|^2$, donc (ξ_i) est un point de l^2_I et l'application f, évidemment linéaire, conserve la norme; donc d'après 14-*10*, f est un isomorphisme de E sur f(E).

Comme f(E) contient évidemment la base canonique de l^2_I, et que celle-ci est totale dans l^2_I, f(E) est partout dense dans l^2_I.

En particulier, si E est complet, f(E) l'est aussi; donc f(E) est à la fois partout dense et fermé dans l^2_I, autrement dit $f(E) = l^2_I$.

COROLLAIRE **16-*14***. — *Soit* E *un espace de Hilbert, et soit* $(a_i)_{i\in I}$ *une base orthonormale de* E. *Pour toute famille* $(\xi_i)_{i\in I}$ *d'éléments de* **K** *tels que* $\sum |\xi_i|^2 < \infty$, *il existe un point* x *de* E *de coordonnées* (ξ_i) *dans la base donnée.*

Cet énoncé, qui résulte directement de 16-*13*, constitue une réciproque de l'énoncé 2 du théorème 16-*4*.

COROLLAIRE **16-*15***. — *Soit* E *un espace préhilbertien séparable.*

Si E *est de dimension finie* n, E *est isomorphe à* $\mathbf{K}^n$.

Si E *est de dimension infinie,* E *est isomorphe à un sous-espace partout dense de* l^2, *et à* l^2 *lui-même s'il est complet.*

C'est une conséquence immédiate de 16-*12* et 16-*13*.

PROPOSITION **16-*16***. — *1° Toutes les bases orthonormales d'un espace de Hilbert* E *ont même nombre cardinal (appelé* dimension hilbertienne *de* E*).*

2° Dire que deux espaces de Hilbert sont isomorphes équivaut à dire qu'ils ont même dimension hilbertienne.

DÉMONSTRATION. — 1° Si E est de dimension finie n, toute base orthonormale de E est une base algébrique, donc son nombre cardinal est n.

Supposons donc E de dimension infinie, et soient $(a_\iota)_{\iota \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ deux bases orthonormales de E.

L'ensemble A des combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels (rationnels complexes si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$) d'éléments a_ι est partout dense dans E; et puisque I est infini et $\mathbf{Q}$ dénombrable, les cardinaux $\overline{\overline{A}}$ et $\overline{\overline{I}}$ de A et I sont égaux (utiliser le fait, qu'on admettra, que pour tout entier p, I et I^p ont même nombre cardinal).

Or dans E les boules ouvertes B_j de centre b_j et de rayon 2^{-1} sont disjointes deux à deux; donc comme chaque B_j contient un point au moins de A, on a $\overline{\overline{J}} \leqslant \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{I}}$.

De façon analogue, $\overline{\overline{I}} \leqslant \overline{\overline{J}}$; d'où $\overline{\overline{I}} = \overline{\overline{J}}$.

2° Tout isomorphisme de deux espaces de Hilbert change toute base orthonormale de l'un en une base orthonormale de l'autre; donc deux tels espaces isomorphes ont même dimension hilbertienne.

Réciproquement, si deux espaces de Hilbert E, F ont même dimension hilbertienne, ils ont des bases orthonormales qu'on peut indexer par le même ensemble I. D'après la proposition 16-*13*, chacun des espaces E, F est isomorphe à l^2_I; ils sont donc isomorphes.

REMARQUE 16-*17*. — Les espaces de Hilbert les plus utilisés sont ceux dont la dimension hilbertienne est $\aleph_0$. Le seul espace de ce type que nous ayons rencontré jusqu'ici est l^2; nous en verrons une autre concrétisation importante dans la théorie de l'intégration.

17. — Séries de Fourier et polynômes orthogonaux

Séries de Fourier. — Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de période 2π.

Pour tous $x, y \in$ E, posons

$$(x|y) = \int_0^{2\pi} x(t)\overline{y(t)}\,dt = \int_\alpha^{\alpha+2\pi} x(t)\,\overline{y(t)}\,dt\,.$$

Cette forme hermitienne positive est un produit scalaire sur E, car la relation $(x|x) = 0$ entraîne $x(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$ puisque x est continue, donc aussi $x(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ puisque x a pour période 2π.

L'espace E muni de ce produit scalaire est un espace préhilbertien, mais

il n'est pas complet (voir exemple 14-7), et ce n'est qu'en utilisant l'intégrale de Lebesgue que nous pourrons plus tard lui substituer l'espace des fonctions de carré sommable et de période 2π qui, lui, est complet.

Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, désignons par a_n la fonction $t \longrightarrow e^{int}$, qui appartient évidemment à E.

PROPOSITION 17-*1*. — *1° La famille des fonctions e^{int} est une base orthogonale de* E.

2° Pour tout $x \in$ E on a :

$$(x|x) = 2\pi \sum |\alpha_n|^2, \quad \text{où } \alpha_n = (x|a_n)/2\pi .$$

3° La famille des fonctions $\alpha_n e^{int}$ est sommable dans E *et a pour somme x.*

DÉMONSTRATION. — On a :

$$(a_p|a_q) = \int_0^{2\pi} e^{i(p-q)t}\,dt = 0 \quad (\text{si } p \neq q), \quad \text{ou } 2\pi \quad (\text{si } p = q),$$

donc la famille (a_n) est orthogonale.

D'autre part, d'après l'application n° 2, chapitre VI, p. 140, toute fonction $x \in$ E est limite uniforme de combinaisons linéaires de fonctions a_n; or la relation :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt \leqslant 2\pi\,(\sup |f(t)|)^2$$

montre que la convergence uniforme entraîne la convergence pour la norme hilbertienne de E.

Il en résulte que la famille des a_n est totale dans E; c'est donc une base orthogonale de E.

Les énoncés 2 et 3 résultent alors du théorème 16-*4* et des formules du 16-*6*.

REMARQUE 17-*2*. — Il est parfois commode, surtout lorsque les fonctions x qu'on veut étudier sont à valeurs réelles, de remplacer la famille des fonctions e^{int} par la famille des fonctions $\cos nt$ (où $n \geqslant 0$) et $\sin nt$ (où $n \geqslant 1$); un calcul élémentaire montre que cette famille est aussi orthogonale.

D'autre part elle est totale dans E puisque la famille des e^{int} est totale et que la relation $e^{int} = \cos nt + i \sin nt$ montre que chaque e^{int} est combinaison linéaire de $\cos nt$ et $\sin nt$; c'est donc une base orthogonale de E.

Si l'on désigne par c_n et s_n respectivement les éléments $\cos nt$ et $\sin nt$ de E, leurs coefficients de Fourier γ_n et σ_n sont donnés par les relations :

$$\gamma_0 = (x|c_0)/2\pi; \quad \gamma_n = (x|c_n)/\pi; \quad \sigma_n = (x|s_n)/\pi \quad \text{pour } n \geqslant 1 .$$

La relation de Parseval s'écrit ici :

$$(x|x) = 2\pi\,|\gamma_0|^2 + \pi \sum_1^\infty (|\gamma_n|^2 + |\sigma_n|^2).$$

Z La proposition 17-*1* montre que pour toute fonction $x \in$ E, la suite des fonctions

$$x_n(t) = \sum_{-n}^{n} \alpha_p e^{int}$$

converge vers x en moyenne quadratique. Mais elle ne dit rien en ce qui concerne la convergence simple ou la convergence uniforme.

Nous reviendrons sur ces questions de convergence lors de l'étude de l'intégration. Notons simplement ici que si la suite des fonctions x_n converge uniformément vers une fonction x', on a $x = x'$; en effet, la suite (x_n) converge alors aussi vers x' au sens de la convergence dans E, et comme elle ne peut avoir qu'un seul point limite, on a $x' = x$.

Polynômes orthogonaux **17-*3*.** — Soit I un intervalle fermé, borné ou non, de **R**, et soit p une fonction numérique continue et > 0 sur l'intérieur de I, et telle que pour tout entier $n \geqslant 0$, on ait :

$$\int_I |t|^n p(t)\,dt < \infty.$$

Nous appellerons une telle fonction un *poids sur* I.

Soit E_p le sous-ensemble de $\mathscr{C}(\mathrm{I}, \mathbf{K})$ constitué par les fonctions x telles que

$$\int_I |x(t)|^2 p(t)\,dt < \infty.$$

Les relations $|x+y|^2 \leqslant 2|x|^2 + 2|y|^2$ et $2|xy| \leqslant |x|^2 + |y|^2$ montrent que E_p est un espace vectoriel et que la fonction

$$(x|y) = \int_I x(t)\,\overline{y(t)}\,p(t)\,dt$$

est une forme hermitienne positive sur E_p.

Comme en outre p est continue, et > 0 sur l'intérieur de I, la relation $(x|x) = 0$ entraîne $x(t) = 0$ pour tout t, donc $x = \mathrm{O}$; autrement dit, $(x|y)$ est un produit scalaire sur E_p, qui fait de E_p un espace préhilbertien.

L'hypothèse faite sur p entraîne que tout monôme t^n est un élément de E_p; et les t^n sont linéairement indépendants puisque tout polynôme qui est identiquement nul sur I a tous ses coefficients nuls; on peut donc appliquer à la suite des t^n le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Posons $a_n(t) = t^n$; les relations de récurrence :

$$P_0 = a_0\,; \qquad P_n = a_n - (\text{projection de } a_n \text{ sur } L_{n-1})$$

montrent que P_n est un polynôme de degré n à coefficients réels, et dont le terme de plus haut degré est t^n.

Les P_n sont appelés les *polynômes orthogonaux associés au poids p sur* I.

On est parfois amené, dans certaines questions, à remplacer les P_n par des polynômes proportionnels $p_n = \lambda_n P_n$ où λ_n est un scalaire $\neq 0$ (par exemple on suppose parfois que p_n prend la valeur 1 à l'une des extrémités de I); mais dans ce qui suit, nous ne considérerons que les P_n.

EXEMPLES CLASSIQUES 17-*4*.

1° $I = [-1, 1]$ et $p(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$ (où α et $\beta > -1$).

Les polynômes P_n correspondants s'appellent *polynômes de Jacobi*.
Pour $\alpha = \beta = 0$ (donc $p(t) = 1$), ce sont les polynômes de *Legendre*.
Pour $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, ce sont les polynômes de *Tschebyscheff*.

2° $$I = [0, \infty[\quad \text{et} \quad p(t) = e^{-t}.$$

Les polynômes P_n s'appellent alors *polynômes de Laguerre*.

3° $$I =]-\infty, +\infty[\quad \text{et} \quad p(t) = e^{-t^2}.$$

Les polynômes P_n s'appellent alors *polynômes d'Hermite*.

PROPOSITION 17-5. — *Lorsque l'intervalle* I *est compact, la suite* P_n *des polynômes associés au poids p sur* I *est une base orthogonale de l'espace préhilbertien* E_p.

DÉMONSTRATION. — Toute fonction continue sur I est limite uniforme de polynômes (voir appliction n° 1, 12-5, chap. VI), donc de combinaisons linéaires des P_n. Donc la suite des P_n est totale dans E_p (même démonstration que pour la proposition 17-*1*); comme d'autre part elle est orthogonale, c'est une base orthogonale de E_p.

Z 1° Lorsque l'intervalle I n'est pas borné, il existe des poids p sur I pour lesquels la suite P_n n'est pas une base orthogonale de E_p. Mais on démontre que c'est encore vrai pour les polynômes de Laguerre et d'Hermite.

2° Comme pour les séries de Fourier, la série de terme général $\alpha_n P_n(t)$ associée à un élément $x \in E_p$ ne converge pas toujours uniformément, ni même simplement, vers la fonction $x(t)$; mais si elle converge uniformément, c'est nécessairement vers $x(t)$.

Propriétés générales des suites de polynômes orthogonaux. — Nous allons montrer que la suite (P_n) des polynômes orthogonaux associés à un poids p sur un intervalle I possède des propriétés intéressantes indépendantes du poids choisi; nous utiliserons pour cela les deux remarques évidentes suivantes :

17-*6*. — Pour tout n, le polynôme P_n est orthogonal à tous les polynômes Q de degré $< n$, car un tel Q est combinaison linéaire des P_i où $i < n$.

17-*7*. — Pour tout n, $P_n - tP_{n-1}$ est un polynôme de degré $< n$, donc

$$(tP_{n-1}|P_n) = (P_n|P_n).$$

17-*8*. — La définition du produit scalaire de E_p montre que, pour toutes fonctions $x, y, z \in E_p$ on a :

$$(xy|z) = (xy\bar{z}|1) = (x|\bar{y}z).$$

PROPOSITION **17-*9*.** — *Tout polynôme P_n a ses n racines réelles, distinctes, et intérieures à* I.

DÉMONSTRATION. — L'orthogonalité de P_n et P_0 entraîne :

$$\int_I P_n(t)\, p(t)\, dt = 0.$$

Donc P_n change de signe en au moins un point intérieur à I. Plus généralement, soit $(t_1, t_2, ..., t_r)$, où $t_i < t_{i+1}$, la suite des racines de P_n intérieures à I en lesquelles P_n change de signe. Nous voulons montrer que $r = n$; or comme évidemment $r \leqslant n$, il suffit d'exclure le cas $r < n$:

Si l'on pose $Q(t) = (t-t_1)(t-t_2) ... (t-t_r)$, le polynôme P_nQ a un signe constant sur I, d'où $(P_n|Q) \neq 0$; la remarque 17-*6* montre que ceci est incompatible avec l'inégalité $r < n$.

PROPOSITION **17-*10*** (RELATION DE RÉCURRENCE). — *Il existe deux suites de nombres réels λ_n, μ_n, avec $\mu_n > 0$ tels que, pour tout $n \geqslant 2$ on ait :*

$$P_n = (t + \lambda_n) P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}.$$

DÉMONSTRATION. — Comme $(P_n - tP_{n-1})$ est de degré $\leqslant (n-1)$, on peut écrire :

$$P_n - tP_{n-1} = \sum_{i \leqslant n-1} c_i P_i.$$

On a donc, pour tout $i \leqslant (n-1)$:

$$-(tP_{n-1}|P_i) = c_i(P_i|P_i). \tag{1}$$

Or, d'après la remarque 17-*8*, $(tP_{n-1}|P_i) = (P_{n-1}|tP_i)$; donc si $i+1 < n-1$, c'est-à-dire $i < (n-2)$, ce produit scalaire est nul; d'où $c_i = 0$ sauf pour $i = (n-2)$ et $(n-1)$.

Pour $i = (n-2)$, la remarque 17-*7* montre que

$$-(P_{n-1}|P_{n-1}) = c_{n-2}(P_{n-2}|P_{n-2}).$$

Donc $c_{n-2} < 0$; pour $i = (n-1)$, la relation (1) montre seulement que c_{n-1} est réel.

REMARQUE. — La relation de récurrence entre les polynômes $p_n = \lambda_n P_n$ a évidemment une forme analogue, bien que moins simple :

$$p_n = (u_n t + v_n) p_{n-1} + w_n p_{n-2}.$$

V. — EXERCICES

Avertissement : Les exercices assez difficiles sont marqués d'un astérisque.

Espaces vectoriels topologiques généraux

1° Soit E un espace vectoriel topologique, et soient X, Y $\subset$ E; démontrer les propriétés suivantes :

a) Si X est ouvert, X+Y l'est aussi ;

b) Si X et Y sont compacts, et si E est séparé, X+Y est compact.

Montrer par un exemple construit dans $\mathbf{R}^2$, que X et Y peuvent être fermés sans que X+Y le soit.

2° On munit l'espace $\mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ des fonctions numériques continues sur $\mathbf{R}$ de la topologie de la convergence uniforme, définie par l'écart

$$d(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|.$$

Montrer que cette topologie n'est pas compatible avec la structure d'espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, bien qu'elle soit compatible avec sa structure de groupe additif.

* 3° Pour tout nombre $\varepsilon > 0$, et tout $x \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$, on dira que ε est associé à x, si l'ensemble des points $t \in [0, 1]$ tels que $|x(t)| \geqslant \varepsilon$ peut être recouvert par une famille finie d'intervalles dont la somme des longueurs est $\leqslant \varepsilon$; on pose alors :

$$p(x) = (\text{borne inférieure de l'ensemble des } \varepsilon \text{ associés à } x).$$

a) Montrer que p n'est pas une norme sur $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$ mais que cependant $p(x) = p(-x)$ et $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$; en déduire que si l'on pose $d(x, y) = p(x-y)$, d est une distance sur cet espace.

b) Montrer que pour toute boule B de centre O et de rayon $\rho > 0$ associée à cette distance, l'enveloppe convexe de B est l'espace tout entier.

c) Montrer que la topologie associée à cette distance est compatible avec la structure d'espace vectoriel de $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$, mais qu'elle n'est pas localement convexe.

d) Montrer que la seule forme linéaire continue sur cet espace est la forme linéaire O.

4° Pour tout nombre $\varepsilon > 0$, et tout $x \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$, on dira que ε est associé à x si l'ensemble des points $t \in [0, 1]$ tels que $|x(t)| \geqslant \varepsilon$ est contenu dans un intervalle de longueur $\leqslant \varepsilon$; on pose alors :

$$q(x) = (\text{borne inférieure de l'ensemble des } \varepsilon \text{ associés à } x).$$

Est-ce que la fonction q possède des propriétés analogues à celles de la fonction p de l'exercice 3?

5° Soit E un espace vectoriel sur **R**, et soit $\mathscr{V}$ l'ensemble des parties convexes V de E contenant O et telles que pour toute droite D de E contenant O, le point O soit intérieur à l'intervalle $D \cap V$.
On dira qu'une partie X de E est *ouverte* si pour tout $x \in X$, il existe un $V \in \mathscr{V}$ tel que $x+V \subset X$.

a) Montrer que l'ensemble de ces « ouverts » définit sur E une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel de E, et que $\mathscr{V}$ constitue une base de voisinages de O pour cette topologie.

b) On se donne une base algébrique $B = (a_i)_{i \in I}$ de E. Montrer que pour toute famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ de nombres > 0, l'enveloppe convexe de l'ensemble des éléments $\alpha_i a_i$ et $-\alpha_i a_i$ appartient à $\mathscr{V}$, et que ces enveloppes convexes constituent une base de voisinages de O.

c) Montrer que toute forme linéaire sur E est continue pour cette topologie.

6° Soit E un espace vectoriel sur **R**; montrer que si E est de dimension infinie, la topologie faible sur E associée à la famille de toutes les formes linéaires sur E est différente de la topologie définie dans l'exercice 5.

7° Soit E un espace vectoriel sur **K**; on se donne sur E deux topologies compatibles avec la structure d'espace vectoriel de E, et on désigne par $\mathscr{V}_1$, $\mathscr{V}_2$ respectivement l'ensemble des voisinages de O pour chacune de ces topologies. Montrer que l'ensemble $\mathscr{V}$ des parties de E de la forme $V_1 \cap V_2$, où $V_1 \in \mathscr{V}_1$ et $V_2 \in \mathscr{V}_2$, est l'ensemble des voisinages de O pour une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel de E.

8° Soient E un espace vectoriel topologique sur **K**, et f une forme linéaire (non identiquement nulle) sur E. Montrer que si l'hyperplan $H = f^{-1}(0)$ est fermé, f est continue. (Montrer d'abord qu'il existe un a tel que $f(a) = 1$, et utiliser le fait que le complémentaire de $f^{-1}(a)$ est un voisinage de O.)

Topologie associée à une famille de semi-normes

9° Nous dirons qu'une partie X d'un espace vectoriel E muni d'une $\mathscr{P}$-topologie est *bornée* si toute semi-norme $p \in \mathscr{P}$ est bornée sur X.

On demande de démontrer que la classe des ensembles bornés est stable par les opérations suivantes :
Fermeture, enveloppe convexe, image par une application linéaire continue, réunion finie, somme vectorielle finie, produit fini.
Montrer que tout compact est borné ; et que pour toute suite (x_n) convergente, l'ensemble des x_n est borné.

10° Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$; et soit X une partie convexe de E telle que

$$E = \bigcup_{k \in \mathbf{R}_+} kX.$$

Pour tout $x \in E$, on pose :

$$p(x) = \inf \text{ des } k > 0 \text{ tels que } x \in kX.$$

Montrer que p est positivement homogène et convexe, et que lorsque X est symétrique, p est une semi-norme ; dans quels cas est-ce une norme ? Montrer que

$$\{x : p(x) < 1\} \subset X \subset \{x : p(x) \leqslant 1\}.$$

11° Soient E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, F un sous-espace vectoriel de E, et p une application de E dans $\mathbf{R}$ telle que, pour tous $x, y \in E$, et tout $\lambda \in \mathbf{R}_+$ on ait :

$$p(\lambda x) = \lambda p(x); \qquad p(x+y) \leqslant p(x) + p(y).$$

a) Soit f une forme linéaire sur E telle que $f(x) \leqslant p(x)$ pour tout $x \in F$; montrer que pour tout $a \in E$, et tous $u, v \in F$ on a :

$$f(u) - p(u-a) \leqslant f(a) \leqslant p(v+a) - f(v).$$

b) Plus généralement, soit f une forme linéaire définie seulement sur F et telle que $f(x) \leqslant p(x)$ pour tout $x \in F$.
Pour tout $a \in E$, posons :

$$k_a = \sup_{u \in F} \big(f(u) - p(u-a)\big); \qquad K_a = \inf_{v \in F} \big(p(v+a) - f(v)\big)$$

Montrer que k_a et K_a sont finis et que $k_a \leqslant K_a$.

c) On conserve les mêmes hypothèses que dans *b*), et on suppose $a \notin F$; soit k un nombre quelconque $\in [k_a, K_a]$.
Pour tout $x \in F$, et tout $\lambda \in \mathbf{R}$, posons

$$g(x + \lambda a) = f(x) + \lambda k.$$

Montrer que g est une forme linéaire sur le sous-espace vectoriel F_a de E engendré par F et a, que g est identique à f sur F, et que $g(y) \leqslant p(y)$ pour tout $y \in F_a$.

12° On suppose E et p définis comme dans l'exercice précédent. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des couples (F, f), où F est un sous-espace vectoriel de E, et f une forme linéaire sur F, telle que $f \leqslant p$ sur F. On dira que

$$(F_1, f_1) \leqslant (F_2, f_2),$$

ou encore que (F_2, f_2) est un prolongement de (F_1, f_1) si $F_1 \subset F_2$ et si f_1 est la restriction de f_2 à F_1.

a) Montrer que cette relation est une relation d'ordre sur $\mathscr{F}$, et que l'ensemble $\mathscr{F}$ ainsi ordonné est inductif (voir 16-9).

b) Déduire de l'exercice précédent que tout élément maximal de $\mathscr{F}$ est de la forme (E, f).

13° Soient à nouveau E, p, $\mathscr{F}$ définis comme dans l'exercice 12.

a) Montrer que tout $(F, f) \in \mathscr{F}$ possède un prolongement (E, g). Montrer en particulier qu'il existe toujours une forme linéaire f sur E telle que $f \leqslant p$ sur E.

b) Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que le prolongement (E, g) de (F, f) soit unique est que, pour tout $a \in E$ on ait, avec les notations antérieures, $k_a = K_a$.

(Les énoncés de cet exercice constituent le théorème de Hahn-Banach, dont les applications à l'Analyse sont multiples.)

14° Soit E un espace vectoriel sur **R**, muni d'une $\mathscr{P}$-topologie séparée. Montrer, en utilisant l'exercice 13, que pour tout $x \neq 0$ dans E, il existe une forme linéaire f continue dans E telle que $f(x) \neq 0$.

15° Montrer que la norme de tout espace normé E sur **R** est l'enveloppe supérieure d'une famille de semi-normes de la forme $|l|$, où $l \in E'$ (utiliser l'exercice 13).

En déduire que si $\mathscr{P}$ est une famille infinie de semi-normes sur un espace vectoriel E, et si $\overline{\mathscr{P}}$ désigne la famille des semi-normes sur E qui sont enveloppes supérieures de sous-familles de $\mathscr{P}$, les topologies sur E associées à $\mathscr{P}$ et $\overline{\mathscr{P}}$ ne sont en général pas identiques.

Indiquer plusieurs cas dans lesquels ces topologies sont identiques.

16° Soit B la boule unité fermée d'un espace normé E sur **R**. Montrer que pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$, il existe une forme linéaire f sur E telle que $\|f\| = 1$ et $f(x) = 1$ (utiliser l'exercice 13).

17° Soient E, F deux espaces vectoriels sur **K**, et soit f une forme bilinéaire sur $E \times F$. On dira que f met E, F *en dualité* si

a) Pour tout $x \neq O$ dans E, il existe $y \in F$ tel que $f(x, y) \neq 0$;

b) Pour tout $y \neq O$ dans F, il existe $x \in E$ tel que $f(x, y) \neq 0$.

On appelle topologie faible sur E associée à f la topologie faible associée à la famille des formes linéaires $l_y : x \to f(x, y)$ (où $y \in F$).

Montrer que cette topologie est séparée, et que si E est de dimension infinie, cette topologie ne peut pas être définie par une norme (montrer pour cela que tout voisinage de O contient un sous-espace vectoriel de E de codimension finie).

Montrer que toute forme linéaire l sur E qui est continue pour la topologie faible qu'on vient de définir est de la forme l_y.

18° Soit D le disque ouvert $\{z : |z| < 3\}$ de $\mathbf{C}$, et soit K le compact $\{z : |z| \leqslant 1\}$. Pour toute $f \in \mathscr{H}(D)$ (voir 3-7), on pose :

$$p(f) = \sup_{z \in K} |f(z)|.$$

a) Montrer que p est une norme sur $\mathscr{H}(D)$;

b) Montrer que la topologie définie par p sur $\mathscr{H}(D)$ n'est pas identique à la topologie de la convergence uniforme sur tout compact (utiliser la suite (f_n) de fonctions, définie par $f_n(z) = e^{n(z-2)}$).

19° Soit A une partie dénombrable de [0, 1], et soit α une application de A dans $]0, \infty[$, telle que $\sum_{t \in A} \alpha(t) < \infty$. Pour tout $x \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$, on pose :

$$\|f\| = \sum_{t \in A} \alpha(t) |f(t)|.$$

a) Montrer que $\|f\|$ est une semi-norme sur $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$; dans quels cas est-ce une norme ? Est-elle alors équivalente à la norme de la convergence uniforme ?

b) Montrer que deux telles semi-normes ne définissent la même topologie sur $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$ que si les ensembles A et A' correspondants sont identiques, et si les rapports α/α' et α'/α sont bornés.

Topologie associée à une norme

20° Montrer que toute partie compacte d'un espace normé est bornée.

21° Montrer que si X, Y sont deux parties compactes d'un espace normé, la réunion des segments de droite joignant un point de X et un point de Y est compacte (utiliser le produit $X \times Y$).

22° Soient E un espace normé, X et Y deux parties de E. Montrer que si X est compact et Y fermé, $X+Y$ est fermé.

23° Montrer que dans tout espace normé, la fermeture de la boule ouverte unité est la boule fermée unité, et que sa frontière est la sphère unité $\{x : \|x\| = 1\}$.

24° Soient E, F deux espaces normés sur $\mathbf{R}$, et soit f une application de E dans F telle que

a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in E$;

b) f est bornée sur la boule unité de E.

Montrer que f est linéaire et continue.

25° Soit X une partie fermée d'un espace normé complet E. Montrer que, pour que X soit compact, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement de X par une famille finie de boules de rayon ε.
Etendre cette propriété à tout métrique complet.

26° Soit E un espace normé.

a) Montrer que si dans E toute série (a_n) absolument convergente est convergente, E est complet.

b) Montrer que si, dans E, toute série (a_n) telle que $\|a_n\| \leqslant 2^{-n}$ est convergente, E est complet.

Comment peut-on étendre ces énoncés à tout espace métrique E ?

27° Soit E un espace vectoriel muni d'une semi-norme p. Nous dirons que $x \sim y$ si $p(x-y) = 0$.

Montrer que cette relation est une relation d'équivalence sur E, compatible avec la structure vectorielle de E et avec la semi-norme en un sens qu'on précisera, et que la classe d'équivalence de O est un sous-espace vectoriel de E. Soit $\widehat{E}$ l'espace quotient de E par cette relation d'équivalence ; montrer qu'on peut le munir d'une structure d'espace vectoriel normé unique telle que l'application canonique $x \longrightarrow \widehat{x}$ de E sur $\widehat{E}$ soit une application linéaire telle que $\|\widehat{x}\| = p(x)$.

On dira que $\widehat{E}$ est l'espace normé associé à E.

Comparaison des normes

28° Pour tout $x \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbf{R})$, on pose :

$$\|x\| = \sup\big(|x(t)| + |x'(t)|\big).$$

Montrer que $\|x\|$ est une norme; est-elle équivalente à la norme $\big(\sup|x(t)| + \sup|x'(t)|\big)$?

29° Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1([0,1], \mathbf{R})$ constitué par les x tels que $x(0) = 0$.

Pour tout $x \in$ E, on pose :

$$\|x\| = \sup|x(t) + x'(t)|.$$

Montrer que $\|x\|$ est une norme sur E, équivalente à la norme $\big(\sup|x(t)| + \sup|x'(t)|\big)$.

30° Comparer, sur $\mathscr{C}^1([0,1], \mathbf{R})$, les normes :

$$\sup|x(t)|; \quad \sup|x(t)| + \int_0^1 |x(t)|\, dt; \quad \sup|x(t)| + \sup|x'(t)|;$$

$$\sup|x(t)| + \int_0^1 |x'(t)|\, dt.$$

31° Montrer que dans l'espace l^1 sur $\mathbf{K}$, les normes $\Sigma|x_n|$ et $\sup|x_n|$ ne sont pas équivalentes.

32° Pour tout $x \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbf{R})$ on définit le nombre positif $p(x)$ par :

$$p^2(x) = x^2(0) + \int_0^1 x'^2(t)\, dt.$$

Montrer que p est une norme, et que la convergence pour cette norme entraîne la convergence uniforme.

Normes et fonctions convexes

33° Soit E un espace normé, et soit S la sphère unité $\{x : \|x\| = 1\}$ de E. On suppose que pour tous $x, y \in S$, on a :

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant 1 - \varphi(\|x-y\|),$$

où φ est une application croissante de $[0, \infty[$ dans $\mathbf{R}_+$, avec $\varphi(u) > 0$ pour tout $u > 0$.
Montrer que pour tout convexe complet $X \subset E$, tout point x de E admet une projection unique sur X.

34° Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. On appelle *complexifié* de E l'espace $E_c = E \times E$ muni de l'addition ordinaire et de la multiplication par les éléments $(\alpha + i\beta)$ de $\mathbf{C}$ définie comme suit :

$$(\alpha + i\beta)(u, v) = (\alpha u - \beta v, \beta u + \alpha v).$$

a) Montrer que E_c est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, et que si l'on plonge E dans E_c en identifiant l'élément u de E à l'élément (u, O) de E_c, le sous-ensemble E de E_c engendre E_c.
b) Si E est normé, montrer que l'on peut, en général, de plusieurs façons prolonger la norme de E en une norme sur l'espace vectoriel E_c sur $\mathbf{C}$; et montrer que ces diverses normes sur E_c sont équivalentes. Montrer que E et E_c sont simultanément complets ou non-complets.
c) Si E est un espace préhilbertien réel, montrer que son produit scalaire se prolonge de façon unique en un produit scalaire sur E_c, dont on donnera l'expression.

35° Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$; on appellera *sous-produit scalaire* sur E toute application q de $E \times E$ dans $\mathbf{R}_+$ telle que :

1) $q(x, y) = q(y, x)$;
2) $q(\lambda x, y) = |\lambda|\, q(x, y)$;
3) $q(u+v, y) \leqslant q(u, y) + q(v, y)$;
4) $q^2(x, y) \leqslant q(x, x)\, q(y, y)$.

a) Montrer que $\big(q(x, x)\big)^{\frac{1}{2}}$ est une semi-norme sur E.
b) Montrer que toute somme, toute limite, et toute enveloppe supérieure de sous-produits scalaires en est un.
c) Montrer que si $(x \mid y)$ est un produit scalaire sur E, sa valeur absolue est un sous-produit scalaire.

36° Soient E, F deux espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$; soient A une partie convexe de $E \times F$, et f une fonction convexe sur A.
On désigne par X la projection de A sur E, et pour tout $x \in X$, on pose

$$g(x) = \inf_{(x, y) \in A} f(x, y).$$

Montrer que lorsque g est finie dans X, g est convexe.

37° Soit E un espace normé sur **R**

a) Montrer que l'application $x \longrightarrow \|x\|$ de E dans **R** est convexe et lipschitzienne de rapport 1.

b) Montrer que l'application $(x, y) \longrightarrow \|x-y\|$ de $E \times E$ dans **R** est convexe et lipschitzienne.

Pour toute partie A non vide de E, et pour tout $x \in E$, on pose maintenant :

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} \|x-y\| ; \qquad D_A(x) = \sup_{y \in A} \|x-y\| .$$

c) Montrer que si A est borné, D_A est une fonction convexe et lipschitzienne de rapport 1.

d) On suppose désormais A convexe ; montrer qu'alors d_A est convexe (utiliser l'exercice 36).

e) On pose $A' = \complement A$, et on désigne par f la fonction ainsi définie :

$$f(x) = d_A(x) \text{ pour } x \in A' ; \qquad f(x) = -d_{A'}(x) \text{ pour } x \in A.$$

Montrer que f est convexe dans E.

38° On désigne par E l'espace vectoriel $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

a) Montrer que pour tous $a, b \in E$ tels que $a \leqslant b$, l'ensemble des $x \in E$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ est un convexe fermé borné de E.

b) Pour tout $\varepsilon > 0$, on désigne par X_n l'ensemble des $x \in E$ tels que :

$$x(0) = 1 ; \qquad 0 \leqslant x(t) \leqslant 1 \text{ sur } [0, 1/n] ; \qquad x(t) = 0 \text{ sur } [1/n, 1] .$$

Montrer que (X_n) est une suite décroissante de convexes fermés bornés de E, et que leur intersection est vide.

39° Soit à nouveau E l'espace défini dans l'exercice précédent ; et soit X l'ensemble des $x \in E$ qui sont $\geqslant 0$, décroissants, et tels que

$$1 \leqslant x(0) \leqslant 2 \quad \text{et} \quad \int_0^1 x(t)\, dt = x(0) - 1 .$$

a) Montrer que X est une partie convexe fermée et bornée de E, et que $d(O, X) = 1$.

b) Montrer qu'il n'existe aucun $x \in X$ tel que $d(O, x) = 1$.

Formes linéaires sur les espaces normés

40° Soit E l'espace $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$ muni de la norme de la convergence en moyenne.

a) Montrer que dans E la forme linéaire $x \longrightarrow \int_0^1 \varphi(t)\, x(t)\, dt$, où $\varphi \in E$ est continue. Trouver sa norme.

b) Montrer par contre que si $\varphi(t) = t^{-\frac{1}{2}}$, cette forme linéaire n'est pas continue.

c) Montrer que dans E, les x tels que $\int_0^1 x(t)\,dt = 0$ constituent un hyperplan fermé.

d) Montrer que dans E, l'ensemble des monômes t^n est total.

e) Montrer que dans E la forme quadratique $x \longrightarrow \int_0^1 x^2(t)\,dt$ n'est pas continue.

41° Montrer que dans $\mathscr{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme, la forme linéaire $x \longrightarrow x'(0)$ n'est pas continue.

42° Dans l'espace $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme, soit E l'ensemble des x tels que $\int_0^1 x(t)\,dt = 0$.

Montrer que tout $u \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$ admet une seule primitive appartenant à E; on la notera T_u.

Montrer que T est linéaire et on calculera sa norme.

43° On désigne par E l'espace vectoriel $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Soit (t_n) une suite de points partout dense dans $[0, 1]$; pour tout $x \in$ E, on pose

$$l(x) = \sum_n (-2)^{-n} x(t_n)\,.$$

a) Montrer que l est une forme linéaire continue sur E.

b) Montrer que l n'atteint sa borne supérieure en aucun point de la boule fermée unité de E.

44° Soit X un espace compact, et soit $\mathscr{M}(X)$ le dual topologique de l'espace vectoriel $\mathscr{C}(X, \mathbf{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

a) Montrer que toute forme linéaire sur $\mathscr{C}(X, \mathbf{R})$, qui est positive sur l'ensemble des fonctions $x \geqslant 0$, appartient à $\mathscr{M}(X)$.

b) Soit (a_n) une suite de points de X, et soit (α_n) une suite de nombres réels tels que $\Sigma|\alpha_n| < \infty$; pour tout $x \in \mathscr{C}(X, \mathbf{R})$, on pose :

$$\mu(x) = \sum \alpha_n x(a_n)\,.$$

Montrer que μ est un élément de $\mathscr{M}(X)$, et montrer que sa norme est égale à $\Sigma|\alpha_n|$.

45° On suppose maintenant que $X = [0, 1]$; on désigne respectivement par μ et μ_n les formes linéaires :

$$\mu(x) = \int_0^1 x(t)\,dt\,; \qquad \mu_n(x) = 1/n \sum_1^n x(p/n)\,.$$

a) Calculer les normes de μ, μ_n et $(\mu - \mu_n)$.

b) Montrer que dans $\mathscr{M}(X)$ la suite μ_n ne converge pas vers μ au sens de la norme, mais qu'elle converge vers μ pour la topologie faible de $\mathscr{M}(X)$ (voir 3-*11*).

Dual topologique et bidual

46° Soient E un espace normé sur **R**, F un sous-espace vectoriel de E, et f une forme linéaire continue sur F.
En utilisant la relation $|f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|$ et l'exercice 13, montrer qu'il existe une forme linéaire g sur E, qui prolonge f, et telle que $\|g\| = \|f\|$.

47° Soit E un espace normé sur **R**. Déduire de l'exercice précédent que, pour tout $x \in$ E, il existe $l \in$ E′ telle que

$$\|l\| = 1 \quad \text{et} \quad l(x) = \|x\|.$$

48° Soient E un espace normé sur **R**, E′ son dual topologique, E″ le dual topologique de E′ (appelé *bidual* de E).

a) Pour tout $x \in$ E, on désigne par φ_x la forme linéaire $l \longrightarrow l(x)$ sur E′, montrer que $\varphi_x \in$ E″ et que $\|\varphi_x\| \leqslant \|x\|$.

b) En utilisant l'exercice précédent, montrer que $\|\varphi_x\| = \|x\|$, et que l'application linéaire φ de E dans E″ est une isométrie.

c) En déduire que tout espace normé sur **R** peut être plongé dans un espace normé complet; étendre ce résultat aux espaces normés sur **C**.

d) Montrer, en utilisant pour espace E l'espace $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme, que même lorsque E est complet, E″ contient en général des points qui n'appartiennent pas à E (identifié ici à φ(E)).

* 49° Soit E un espace normé, et soit A une partie convexe de E.

a) Montrer que si A est partout dense dans E pour la topologie affaiblie de E, il en est de même pour la topologie associée à la norme (on pourra utiliser l'exercice 13).

b) Par contre montrer que dans tout espace normé E de dimension infinie, le complémentaire A de la boule unité est partout dense dans E pour la topologie affaiblie de E.

Applications linéaires compactes

50° Soit f une application linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F ; on dit que f est *compacte* si pour toute partie bornée X ⊂ E, $\overline{f(X)}$ est compact.

a) Montrer que pour que f soit compacte, il faut et il suffit que $\overline{f(B)}$ soit compact (où B désigne la boule unité fermée de E).

b) Montrer que toute application linéaire compacte est continue, mais que l'inverse est faux.

c) Montrer que toute $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que f(E) soit de dimension finie est compacte.

d) Montrer que si E est de dimension finie, f est compacte.

e) Montrer que si f et g sont compactes, $(f+g)$ l'est aussi. En déduire que l'ensemble C (E, F) des applications linéaires compactes de E dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}$(E, F).

f) Montrer, en utilisant l'exercice 25, que si F est complet, C (E, F) est fermé dans $\mathscr{L}$ (E, F).

51° Soient E, F, G trois espaces normés, $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $g \in \mathscr{L}(F, G)$.
Montrer que si l'une des deux applications f, g est compacte, $f \circ g$ l'est aussi.

52° Soit E un espace normé sur $\mathbf{K}$, soit $\lambda \in \mathbf{K}$, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Désignons par E_λ l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) = \lambda x$, $\lambda \neq 0$.
Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel fermé de E.
Montrer que lorsque f est compacte, E_λ est de dimension finie (utiliser le théorème 7-6).

53° On désigne par E l'espace $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{C})$ muni de la norme de la convergence uniforme; on se donne $K \in \mathscr{C}([0, 1]^2, \mathbf{C})$, et on désigne par T l'application linéaire de E dans lui-même ainsi définie :

$$(Tx)(t) = \int_0^1 K(t, u)\, x(u)\, du\,.$$

a) Vérifier que $Tx \in E$, puis montrer que T est continue et calculer sa norme, ou du moins une majoration de sa norme.

b) Montrer que lorsque K est un polynôme, T (E) est de dimension finie. En déduire, en utilisant le théorème de Stone-Weierstrass et l'exercice 50, que pour tout K, T est compacte.

54° Même problème lorsqu'on munit E de la norme de la convergence en moyenne (ou en moyenne d'ordre $p \geqslant 1$).

55° Soit (k_n) une suite bornée de scalaires, et soit T l'application de l'espace normé l^p dans lui-même ainsi définie :
Pour tout $x = (x_n)$, $T(x)$ est le point $(k_n x_n)$.
Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que T soit compacte, est que la suite (k_n) ait pour limite 0.

56° Soit E l'espace $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme; et soit T l'application de E dans lui-même définie par :

$$Tx(t) = \int_0^t x(u)\, du\,.$$

a) Montrer que T^n peut être défini par une relation de la forme :

$$T^n x(t) = \int_0^1 K_n(t, u)\, x(u)\, du\,,$$

où $K_n(t, u)$ est une fonction continue de (t, u) dans $[0, 1]^2$.

b) Calculer la norme de T^n dans $\mathscr{L}(E)$; montrer que la famille des T^n est sommable dans $\mathscr{L}(E)$ et calculer sa somme.

c) Utiliser ces résultats pour résoudre l'équation :

$$(I-T)\,x = g\,,$$

où g est un élément donné de E, I l'application identique de E, et x l'inconnue.

57° Plus généralement, soit X un espace compact ; soit E l'espace $\mathscr{C}(X, \mathbf{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme, et soit T une application linéaire de E dans E.

a) Montrer que si $Tx \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$, T est continue.
On suppose en outre désormais que, pour tout entier n, on a :

$$Tu + T^2u + \ldots + T^n u \leqslant ku\,,$$

où k est une constante $\geqslant 0$, et u l'unité de E $\big(u(t) = 1$ pour tout $t \in X\big)$.

b) Montrer que

$$\lim_{n \to \infty} \big(T^n u(t)\big) = 0$$

pour tout t, et que $T^{p+q}u \leqslant kT^p u$ pour tous entiers p, $q \geqslant 1$.
Déduire de là que la suite $T^n u$ converge uniformément vers 0 (utiliser l'exercice 86, chapitre V).

c) Montrer que pour tout $x \in E$, on a $\|T^n x\| \leqslant A\|x\|\lambda^n$, où A et λ sont des constantes positives, avec $\lambda < 1$.

d) En déduire que l'application $x \to x - Tx$ est une isomorphie de E sur E, et donner l'expression de la solution générale de l'inégalité $x \geqslant Tx$.

Espaces normés complets

58° Soit E la partie de $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$ constituée par les fonctions continues x à variation bornée, et telles que $x(0) = 0$; et pour tout $x \in E$, désignons par $p(x)$ la variation totale de x sur $[0, 1]$.

a) Montrer que E est un espace vectoriel, et que p est une norme sur cet espace.

b) Montrer que p n'est pas continue sur E muni de la norme de la convergence uniforme, mais seulement semi-continue inférieurement.

c) Montrer que E, muni de la norme p, est un espace normé complet.

* 59° On se donne un nombre $p \geqslant 1$, et pour tout $f \in \mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, on désigne par $\|f\|$ le nombre positif, fini ou infini, défini par :

$$\|f\|^p = \limsup_{a \to \infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} |f(t)|^p\,dt\,.$$

Puis on désigne par B_p la partie de $\mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ constituée par les f tels que $\|f\| < \infty$.

a) Montrer que B_p est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ et que $\|f\|$ est une semi-norme sur B_p ; montrer par un exemple que ce n'est pas une norme.

b) Pour tout $u \in \mathbf{R}$, et tout $f \in B_p$, on désigne par f_u la fonction définie par $f_u(x) = f(x-u)$.
Montrer que $\|f_u\| = \|f\|$.

c) Montrer que l'ensemble S_p des $f \in B_p$ tels que $\|f\|^p$ soit exactement la limite de

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} |f(t)|^p \, dt$$

est fermé dans B_p.

d) On désigne par $\mathscr{B}_p$ l'espace normé associé à B_p (voir exercice 27) et on l'appelle *espace de Besicovitch* d'indice p. Montrer que cet espace normé est complet.

* 60° Soient E, F deux espaces normés, le premier étant complet, et soit A une partie de $\mathscr{L}(E, F)$ telle que, pour tout $x \in E$, l'ensemble des $f(x)$ pour lesquels $f \in A$ soit borné.
Soit φ l'application de E dans $\mathbf{R}_+$ ainsi définie :

$$\varphi(x) = \sup_{f \in A} \|f(x)\| .$$

a) Montrer que φ est semi-continue inférieurement et convexe.

b) Déduire de la semi-continuité de φ et du fait que E est complet, qu'il existe un ouvert non vide de E sur lequel φ est majorée (utiliser les exercices 102, 103, 104 du chapitre V).

c) Déduire de là que A est une partie bornée de $\mathscr{L}(E, F)$.

61° Soient E, F deux espaces normés, le premier étant complet, et soit f_n une suite d'éléments de $\mathscr{L}(E, F)$ telle que, pour tout $x \in E$, la suite $f_n(x)$ ait une limite $f(x)$.
Montrer, en utilisant l'exercice précédent, que $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

* 62° Soient E, F deux espaces normés, le premier étant complet, et soit f une application linéaire de E dans F.
On suppose qu'il existe une partie A de E, dont le complémentaire soit réunion dénombrable de parties non-denses de E, et telle que la restriction de f à A soit continue (signalons que toutes les f qu'on peut définir explicitement en Analyse possèdent cette propriété).

a) Montrer qu'il existe un translaté $A' = A + a$ de A contenant O qui possède les mêmes propriétés que A ; et montrer qu'il existe une boule ouverte B de centre O telle que $\|f(x)\| \leqslant 1$ pour tout $x \in (A' \cap B)$.

b) En utilisant les exercices 102, 103, 104 du chapitre V, montrer que

$$B \subset \tfrac{1}{2}[(A' \cap B)+(A' \cap B)].$$

En déduire que f est continue.

Espaces normés séparables

Rappelons qu'on appelle *séparable* tout espace métrique qui contient une partie finie ou dénombrable partout dense.

63° *a*) Montrer que, pour qu'un espace normé soit séparable, il faut et il suffit qu'il contienne une partie totale finie ou dénombrable.

b) En déduire que chacun des espaces $\mathscr{C}^p([0, 1], \mathbf{K})$ est séparable.

c) Même question pour l'espace $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{K})$ muni de la norme de la convergence en moyenne d'ordre p (où $p \geqslant 1$).

d) Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que l^p_I soit séparable est que I soit fini ou dénombrable.

64° Soit E un espace vectoriel muni de deux normes p, q telles que $p \leqslant kq$ (où k est un nombre > 0).
Montrer que si E muni de la norme q est séparable, E muni de la norme p l'est aussi.

* 65° Soit E un espace normé muni d'une base algébrique dénombrable $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $\|a_n\| = 1$ pour tout n.

a) Montrer que pour toute suite (α_n) de nombres > 0 tels que $\Sigma\alpha_n < \infty$, la suite (b_n) où $b_n = \sum_0^n \alpha_i a_i$ est une suite de Cauchy.

b) Pour tout $n > 0$, on désigne par d_n la distance de a_n à l'espace vectoriel engendré par $(a_0, a_1, ..., a_{n-1})$; et on définit la suite (α_n) par récurrence par les conditions suivantes :

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 1 ; \qquad \alpha_{n+1} = 3^{-1}\alpha_n d_n .$$

Montrer que la suite de Cauchy (b_n) associée à la suite (α_n) ne converge pas dans E.

c) En déduire qu'aucun espace de Banach de dimension infinie n'a de base algébrique dénombrable.

66° Désignons par E l'espace vectoriel des suites bornées $x = (x_n)$ de nombres complexes, muni de la norme $\|x\| = \sup_n |x_n|$.

a) Quelle est l'adhérence E_0 dans E de l'espace vectoriel des suites $x = (x_n)$ qui n'ont qu'un nombre fini d'éléments $\neq 0$.

b) Quelle est l'adhérence dans E de l'espace vectoriel des suites $x = (x_n)$ telles que $\Sigma |x_n| < \infty$.

c) Montrer que l'ensemble des suites $x = (x_n)$ telles que $\Sigma |x_n| \leqslant 1$ est fermé dans E.

d) Montrer que E n'est pas séparable, mais que par contre E_0 l'est.

e) Montrer que le sous-espace vectoriel de E constitué par les suites $x = (x_n)$ telles que $\lim_{n \to \infty} x_n$ existe, est complet et séparable.

67° *a*) Montrer que, quels que soient les nombres réels distincts λ, μ, si on pose

$$f(t) = e^{i\lambda t} - e^{i\mu t},$$

l'élément f de l'espace B_p défini dans l'exercice 59, a une norme $\geqslant$ 1.

b) En déduire que l'espace normé $\mathscr{B}^d$ associé à B_p n'est pas séparable (utiliser la famille des fonctions $e^{i\lambda t}$).

Applications linéaires non continues

68° Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$, et soit $\mathscr{L}$ l'ensemble des parties libres de E, ordonné par inclusion.

a) Montrer que $\mathscr{L}$ est un ensemble inductif.

b) Montrer que toute partie libre maximale de E engendre E.

c) En déduire que E contient une base algébrique.

69° Soit B une base algébrique d'un espace vectoriel E sur $\mathbf{K}$, et soit f une application quelconque de B dans $\mathbf{K}$.

a) Montrer qu'il existe une forme linéaire unique g sur E telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in$ B.

b) On suppose maintenant que E est un espace normé de dimension infinie; soit alors (a_n) une suite infinie de points distincts de B. On désigne par f la fonction sur B ainsi définie :

$$f(a_n) = n\|a_n\| \text{ pour tout } n\,; \qquad f(x) = 0 \text{ si } x \text{ n'est pas un } a_n\,.$$

Montrer que la forme linéaire g associée à f n'est pas continue.

c) En utilisant la même idée, montrer que l'ensemble des formes linéaires discontinues sur un espace normé de dimension infinie, a une puissance au moins égale à l'ensemble des formes linéaires continues.

Produits d'espaces normés et sommes directes

70° Soit E un espace normé, et soient A, B deux sous-espaces vectoriels de E dont E soit la somme directe algébrique (autrement dit A+B = E et $A \cap B = \{O\}$).

Pour tout $x \in$ E, on désigne par x_A, x_B les composantes de x dans A et B.

a) Montrer que si l'application $x \longrightarrow x_A$ est continue, il en est de même de l'application $x \longrightarrow x_B$, et que A et B sont alors fermés dans E.

b) Montrer qu'alors l'application $(u, v) \longrightarrow (u+v)$ de l'espace normé $A \times B$ dans E est un isomorphisme, et que si A et B sont complets, E l'est aussi.

c) Montrer que la continuité de x_A peut encore s'exprimer en disant que la distance des sphères-unité de A et B est $\neq 0$.

* 71° Soit E l'espace $\mathscr{C}([0, \pi], \mathbf{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit E_1 (resp. E_2) l'adhérence du sous-espace de E engendré par les fonctions 1 et $\cos n!\,t$ (resp. $x^n/n + \cos n!\,t$) (où $n \in \mathbf{N}^*$).

a) Montrer que $E_1 \cap E_2 = \{O\}$.

b) Montrer que $(E_1 + E_2)$ est distinct de E ; en déduire qu'un espace normé non-complet peut être somme directe algébrique de deux sous-espaces vectoriels complets.

Espaces normés de dimension finie

72° Soit E_p l'espace vectoriel des polynômes P (X) à coefficients complexes et de degré $\leqslant p$.

Soient $z_0, z_1, ..., z_p$ des points distincts de $\mathbf{C}$; on pose :

$$\| P \| = | P(z_0) | + \ldots + | P(z_p) | .$$

Montrer que $\|P\|$ est une norme sur E_p, et que les diverses normes obtenues en faisant varier les points z_i sont équivalentes.

L'application $P \longrightarrow P'$, où $P'(z) = zP(z)$, de E_p dans E_{p+1} est-elle continue ?

73° Montrer que s'il existe dans un espace normé E un ensemble compact d'intérieur non vide, E est de dimension finie.

* 74° Montrer que dans tout espace normé E de dimension n sur $\mathbf{R}$, il existe une base $(a_1, a_2, ..., a_n)$ de E telle que, si (x_i) désignent les coordonnées de x dans cette base, on ait :

$$\sum | x_i | \leqslant \| x \| \leqslant n \sum | x_i | .$$

(On conseille d'utiliser la fonction : déterminant de $(b_1, b_2, ..., b_n)$ et de chercher à la maximiser, tout en imposant aux b_i d'avoir une norme 1).

Montrer, tout au moins pour $n = 2$, que dans l'inégalité ci-dessus, la constante n ne peut pas être remplacée par une autre plus petite.

75° Etudier le problème analogue à celui de l'exercice précédent, en remplaçant $\Sigma |x_i|$ par $(\Sigma |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$, et n par une autre constante.

**76° Démontrer la propriété admise sans démonstration dans l'exercice 84.

Familles sommables de nombres réels ou complexes

77° Soit (ω_i) une famille de sous-intervalles de $[0, 1]$; on désigne par a_i la longueur de ω_i.
Montrer que si $\Sigma a_i < 1$, la famille (ω_i) ne peut pas recouvrir $[0, 1]$.
Plus précisément, montrer que la réunion des ω_i a un complémentaire dans $[0, 1]$ qui ne peut pas être fini ou dénombrable.
(On étudiera d'abord avec soin le cas d'une famille finie, puis on passera au cas général en utilisant convenablement le théorème de Heine-Borel-Lebesgue.)

78° Construire une famille $(a_{p,q})$ de nombres réels (où $p, q \in \mathbf{N}$) telle que
a) $a_{p,q} = a_{q,p}$;
b) pour tout p, la famille $(a_{p,q})_{q \in \mathbf{N}}$ est sommable et de somme 0 ;
c) la famille des $a_{p,q}$ n'est pas sommable.

* 79° Soit (a_n) une suite de nombres complexes telle que $\Sigma\, |\, a_n\, |^2 < \infty$; montrer que la famille de terme général $a_p a_q/(p+q)$ (où $p,\ q \geqslant 1$) est sommable.

80° Soit $x \in \mathbf{C}$, avec $|x| < 1$; démontrer les identités :

$$\sum_1^\infty \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_1^\infty \frac{x^n}{1-x^{2n}}\,; \qquad \sum_1^\infty \frac{n x^n}{1-x^n} = \sum_1^\infty \frac{x^n}{(1-x^n)^2}$$

Familles sommables dans les groupes topologiques et les espaces normés

81° *a*) Soit G un groupe topologique quelconque, et soit A une partie de G. Montrer que $\overline{\mathrm{A}}$ est l'intersection des $\mathrm{A} \cdot \mathrm{V}$ (et des $\mathrm{V} \cdot \mathrm{A}$), où V parcourt l'ensemble $\mathscr{V}$ des voisinages de l'élément neutre e de G (on utilisera le fait que les voisinages symétriques de e constituent une base de $\mathscr{V}$).
b) En déduire que les voisinages fermés de e constituent une base de $\mathscr{V}$.

82° Soient E un espace normé, I un ensemble d'indices, et p un nombre réel $\geqslant 1$.
On désigne par $l_{\mathrm{I}}^p(\mathrm{E})$ le sous-ensemble de $\mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathrm{E})$ constitué par les familles $a = (a_i)_{i \in \mathrm{I}}$ d'éléments de E telles que $\sum_i \|a_i\|^p < \infty$.
a) Montrer que l_{I}^p est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathrm{E})$ et que $(\sum_i \|a_i\|^p)^{1/p}$ est une norme sur cet espace.
b) Montrer que lorsque E est complet, $l_{\mathrm{I}}^p(\mathrm{E})$ l'est aussi, et réciproquement.
c) Supposons que E soit une algèbre normée, et munissons $l_{\mathrm{I}}^p(\mathrm{E})$ de la multiplication ainsi définie :
Si $a = (a_i)$ et $b = (b_i)$, le point $c = a \cdot b$ est le point $(a_i b_i)$.

Vérifier que cette multiplication a bien un sens, et qu'elle fait de l^p_i (E) une algèbre normée.

83° Soient E un espace normé complet, et $\big(a_i(n)\big)_{i\in I}$ une suite de familles d'éléments de E, telle que pour tout entier n, $\|a_i(n)\| \leqslant \lambda_i$, où la famille des nombres positifs λ_i est sommable.
Montrer que si pour tout $i \in I$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_i(n) = a_i$, la famille (a_i) est sommable et les sommes $s_n = \sum\limits_i a_i(n)$ convergent vers $s = \sum\limits_i a_i$.
Etendre ce résultat au cas où l'on remplace les familles $\big(a_i(n)\big)$ par une famille $\big(a_i(\lambda)\big)$ dépendant d'un paramètre $\lambda \in L$, et où pour tout i, $a_i(\lambda)$ converge vers a_i suivant une base de filtre $\mathscr{B}$ sur L.

* 84° On admettra ici la propriété suivante :
Il existe une suite (α_n) de nombres > 0 qui converge vers 0, et telle que pour tout $n \geqslant 1$, et pour tout espace normé E de dimension n sur **R**, il existe n vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de norme 1 dans E tels que toute somme partielle des a_i ait une norme $\leqslant n\,\alpha_n$.
En utilisant cette propriété, et l'exercice 95, montrer que dans tout espace normé E de dimension infinie, il existe une suite (b_n) d'éléments de E, telle que cette suite soit sommable mais non absolument sommable.

* 85° On considère les applications f de **R** dans **R** telles que pour toute famille sommable (a_i) de nombres réels, la famille des $f(a_i)$ soit aussi sommable.
a) Montrer que ces f sont caractérisées par le fait que f est lipschitzienne au point 0, en un sens qu'on précisera. (Utiliser l'exercice 99.)
b) Etendre ce résultat aux applications f d'un espace vectoriel de dimension finie dans un autre.
c) Peut-on l'étendre à des espaces normés de dimension infinie ?

86° Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie d'éléments d'un espace vectoriel E sur **R**. On suppose que la somme de toute sous-famille finie de la famille (a_i) appartient à une partie convexe C de E contenant O.
Montrer que pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de [0, 1], la somme de toute sous-famille finie de la famille des $\lambda_i a_i$ appartient aussi à C.
On conseille d'utiliser l'une des méthodes suivantes :
a) Démonstration par récurrence sur le nombre d'éléments de I.
b) Démontrer d'abord la propriété lorsque $E = \mathbf{R}$ et C une demi-droite affine de **R** ; puis la démontrer lorsque E est de dimension finie en utilisant le fait que tout convexe fermé de E est une intersection de demi-espaces affines.

87° Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments d'un espace normé E sur **C** ; et soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de **C** telle que $|\lambda_i| \leqslant 1$ pour tout i.
Montrer que si la somme de toute sous-famille finie des a_i est de norme $\leqslant k$, la somme de toute sous-famille finie de la famille des $\lambda_i a_i$ est de norme $\leqslant 4\,k$ (et même $2\,k$ si les λ_i sont réels).

88° Soit E un espace normé complet sur $\mathbf{K}$, et soit $(a_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille sommable d'éléments de E.

a) Montrer que pour toute famille bornée $(\lambda_i)_{i \in \mathrm{I}}$ d'éléments de $\mathbf{K}$, la famille des $\lambda_i a_i$ est sommable.

b) Soit $(\lambda_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille d'applications d'un ensemble X dans $\mathbf{K}$ telle que pour tout $i \in \mathrm{I}$ et tout $x \in \mathrm{X}$, $|\lambda_i(x)| \leqslant \mathrm{K}$ (où $\mathrm{K} < \infty$).
Montrer que la famille des $\lambda_i(x)\, a_i$ est uniformément sommable sur X; en déduire que si X est un espace topologique et si les λ_i sont continues, l'application $x \longrightarrow \sum_i \lambda_i(x)\, a_i$ de X dans E est continue.

c) Utiliser ce résultat pour démontrer que l'ensemble des sommes $\sum_i \lambda_i a_i$, où les λ_i sont astreints à la seule condition $|\lambda_i| \leqslant 1$ est un convexe compact de E. (Pour cet exercice, utiliser l'exercice 87.)

89° Soit (a_n) (où $n \geqslant 1$) une suite d'éléments d'un espace normé E, et posons

$$b_{n,p} = \frac{n a_n}{p(p+1)} \qquad (\text{où} \quad 1 \leqslant n \leqslant p).$$

Montrer que les familles (a_n) et $(b_{n,p})$ sont simultanément sommables (ou non sommables) et que leurs sommes sont égales. (Utiliser l'exercice 86.)

Séries ; comparaison des séries et des familles sommables

90° Soit (a_n) une suite de nombres $\geqslant 0$ telle que $\Sigma a_n = \infty$. Que peut-on dire de la convergence des séries de terme général :

$$a_n/(1+a_n)\,; \qquad a_n/(1+a_n^2)\,; \qquad a_n/(1+na_n)\,; \qquad a_n/(1+n^2 a_n)\,.$$

91° Soient (a_n), (b_n) deux séries positives convergentes; montrer que la série $(\sqrt{a_n b_n})$ est convergente.

92° Soient (a_n), (b_n) deux suites de nombres > 0. Montrer que lorsque $b_{n+1}/b_n \leqslant a_{n+1}/a_n$ pour tout n, la convergence de la série (a_n) entraîne celle de la série (b_n).

93° Soit (a_n) une suite positive décroissante; montrer que si la série (a_n) converge, la suite (na_n) tend vers 0 (considérer les sommes $\sum_n^{2n} a_i$). La réciproque est-elle vraie ?

94° Soit (a_n) une suite de nombres $\geqslant 0$, et posons

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\,.$$

Si la série (a_n^2) converge, que peut-on dire de la série (b_n^2) ?

95° Soit (α_n) une suite croissante de nombres >0 qui converge vers $+\infty$. Montrer qu'il existe une série positive convergente (a_n) et une série divergente (A_n) telles que $A_n \leqslant \alpha_n a_n$.

$$\left(\text{Prendre} \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha_n - 1}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \qquad\qquad A_n = \sqrt{\alpha_n} - \sqrt{\alpha_{n-1}}\right).$$

96° Montrer que pour toute série positive convergente (a_n) il existe une suite positive croissante (α_n) de limite $+\infty$, telle que la série $(\alpha_n a_n)$ soit encore convergente.

97° Montrer que pour toute série positive divergente (a_n), il existe une suite positive décroissante (α_n) de limite 0 telle que la série $(\alpha_n a_n)$ soit encore divergente.

98° Soit f_n une suite d'applications croissantes de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$. Montrer qu'il existe une application croissante f de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$ telle que, pour tout n,

$$\lim_{x \to \infty} f(x)/f_n(x) = +\infty.$$

En déduire que si on mesure la rapidité de convergence d'une série positive par la rapidité de croissance du quotient $\varphi(p) = 1/(a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots)$, pour toute suite donnée de séries convergentes positives, il existe une série positive qui converge plus vite que chaque série de cette suite.

99° Soit (λ_n) une suite de nombres $\geqslant 0$ telle que pour toute série positive convergente (a_n), la série $(\lambda_n a_n)$ soit convergente. Démontrer que la suite (λ_n) est bornée.

100° Soit (a_n) une suite décroissante de nombres > 0, et soit k un nombre > 1 ; pour tout entier $n \geqslant 1$, on notera k_n l'entier le plus voisin de k^n.
Montrer que les séries (a_n) et $(k_n a_{k_n})$ convergent ou divergent simultanément.
En déduire le critère de convergence des séries $(n^{-\alpha})$ et de séries analogues telles que $\left(n^{-1} (\operatorname{Log} n)^{-\alpha}\right)$.

101° Soit (z_n) une suite de nombres complexes, de partie réelle $\geqslant 0$. Montrer que si les séries (z_n) et (z_n^2) convergent, la série (z_n^2) converge absolument.

102° Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, munie d'une dérivée seconde continue, et telle que $f(0) = 0$; et soit (a_n) une suite de nombres réels.
Montrer que si les séries (a_n) et (a_n^2) convergent, il en est de même de la série $\left(f(a_n)\right)$

103° Soit (a_n) une suite de nombres réels de limite 0, et telle que les séries (a_n^+) et (a_n^-) soient divergentes.
Montrer que pour tout nombre $\lambda \in \mathbf{R}$, il existe une permutation π de $\mathbf{N}$ telle que la série $(a_{\pi(n)})$ soit semi-convergente et ait pour somme λ.

*104° Chercher et démontrer un énoncé analogue concernant les suites (a_n) d'éléments de $\mathbf{R}^n$ (on commencera par $n = 2$).

105° Soit (a_n) une suite d'éléments d'un espace normé; montrer que si la série (na_n) converge, la série (a_n) converge aussi.

106° Etudier la convergence des séries de terme général :

$$(-1)^n/\left(\sqrt{n}+(-1)^n\right); \qquad (-1)^n/\left(2n+(-1)^n n\right); \qquad (-1)^n/(n+\cos n\pi).$$

*107° Soit (λ_n) une suite d'éléments de $\mathbf{K}$; démontrer l'équivalence des propriétés suivantes :

a) La série de terme général $|\lambda_n - \lambda_{n+1}|$ est convergente.

b) Pour toute série convergente (a_n) d'éléments de $\mathbf{K}$, la série $(\lambda_n a_n)$ est convergente.

*108° Soit (a_n) une suite d'éléments d'un espace normé E. Montrer que si la série (a_n) est convergente, il existe une suite décroissante (α_n) de nombres positifs, de limite 0, et une suite (b_n) d'éléments de E telle que $a_n = \alpha_n b_n$, et telle que l'ensemble des sommes $(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$ soit borné dans E.
(Ces deux derniers exercices concernent des réciproques de la règle d'Abel.)

109° Soient E, F deux espaces normés, et f une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans un espace normé complet G. Soit (a_n) (resp. b_n) une suite d'éléments de E (resp. F).
Montrer que si la série (a_n) converge, et si la série $(\|b_n - b_{n+1}\|)$ converge, la série des $f(a_n, b_n)$ converge aussi.

110° Soit (a_n) une série d'éléments d'un espace normé; on pose

$$s_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Montrer que si la série (a_n) a pour somme s, la suite $(s_1 + s_2 + \ldots + s_n)/n$ converge vers s.

111° On considère les applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que pour toute série convergente réelle (a_n), la série des $f(a_n)$ soit aussi convergente.
Montrer que ces f sont caractérisées par le fait qu'il existe un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ sur lequel f est linéaire.

*112° Etendre le résultat précédent aux applications f de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, puis aux applications f d'un espace vectoriel topologique E dans un autre F.

Séries et familles sommables de fonctions

113° Soit $(a_n z^n)$ une série entière à coefficients complexes telle que $\Sigma |a_n| < \infty$. Montrer que cette série est uniformément convergente dans le disque fermé $\{z : |z| \leqslant 1\}$ de $\mathbf{C}$. Que peut-on dire de sa somme ?

114° Pour toute $f \in \mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, on pose

$$\|f\| = \int_{\mathbf{R}} |f(t)|\, dt\,;$$

soit E la partie de $\mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ constituée par les f telles que $\|f\| < \infty$.

a) Montrer que E est un espace vectoriel et que $\|f\|$ est une norme sur E.

b) La série de terme général f_n $(n \geqslant 1)$, où

$$f_n(t) = (-1)^n e^{-n|t|}$$

converge-t-elle dans E ? Converge-t-elle uniformément sur certains intervalles de $\mathbf{R}$?

115° Montrer que la série positive de terme général $x^2(1+x^2)^{-(n+1)}$ est convergente pour tout $x \in \mathbf{R}$, et qu'elle est uniformément convergente sur tout compact ne contenant pas 0, mais non sur $[0, 1]$.

116° Montrer que pour tout compact K de $\mathbf{C}$, la série de terme général $(n^2 - z^2)^{-1}$, après suppression d'un nombre fini de termes, est uniformément convergente sur K. Qu'en déduire pour sa somme ?

117° Pour chacune des séries dont le terme général va être donné, on déterminera l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ pour lesquels la série converge, puis on déterminera des compacts de $\mathbf{R}$, sur lesquels ces séries convergent uniformément. On étudiera ensuite le même problème pour $x \in \mathbf{C}$ (pour le logarithme on supposera $\operatorname{Log}(1+u)$ défini pour $|u| < 1$ par son développement en série entière) :

$$n^{-3/2}\cos n^2 x\,; \qquad \sin x^n\,; \qquad \sin x/n^2\,; \qquad 2^n \sin x/3^n\,;$$

$$n^{3/2}\sin x/n^3\,; \qquad 1-\cos x/n\,; \qquad 1/(n+x)^2\,; \qquad x\cos(2n+1)x^2\,;$$

$$x^{(1+1/2+\dots+1/n)}\,; \qquad \operatorname{Log}(1+x^n)\,; \qquad \operatorname{Log}(\cos x/n)\,.$$

Que peut-on dire de la somme de ces séries ?

*118° Soient (a_n) une suite de nombres complexes, (λ_n) une suite croissante de nombres réels, de limite $+\infty$.

Montrer que si la série de terme général $a_n e^{-\lambda_n z}$ (où $z \in \mathbf{C}$) converge en un point z_0, elle converge uniformément dans tout angle de la forme

$$\{z : |\operatorname{Arg}(z - z_0)| \leqslant k < \pi/2\}\,.$$

(On se ramènera d'abord au cas $z_0 = 0$, puis on s'inspirera de la démonstration de la règle d'Abel.)

119° Soit f une application semi-continue inférieurement de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}_+$. Montrer, en utilisant l'exercice 9, chapitre VI, qu'il existe une suite (a_n) d'applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}_+$ telle que, pour tout x, la série $\big(a_n(x)\big)$ soit convergente et de somme $f(x)$.

Montrer que si $f > 0$, on peut imposer en outre aux a_n d'être des polynômes.

120° Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$ telle que, pour tout $x \in [0, 1]$, la série de terme général $|a_n(x)|$ soit convergente.
Montrer que, pour tout x, la série de terme général $a_n(x)$ est convergente et que, si $f(x)$ désigne sa somme, f est la différence de deux fonctions semi-continues inférieurement.
En utilisant l'exercice précédent, énoncer et démontrer une réciproque de cette propriété.

121° Soient X un ensemble, E un espace normé complet, (a_n) une suite d'applications de X dans E, et (λ_n) une suite décroissante d'applications de X dans $\mathbf{R}_+$.

a) En modifiant un peu le calcul fait pour démontrer la proposition 10-*14*, montrer que si l'on pose :

$$k_p(x) = \sup_{q \geqslant p} \| a_p(x) + \ldots + a_q(x) \|,$$

la série de terme général $\lambda_n(x)\, a_n(x)$ est uniformément convergente dans X lorsque la suite $\lambda_p(x)\, k_p(x)$ tend uniformément vers 0 dans X.

b) Montrer que ceci a lieu en particulier dans les deux cas suivants :

1. L'ensemble des sommes $\big(a_0(x) + \ldots + a_n(x)\big)$ est borné dans E, et la suite $\big(\lambda_n(x)\big)$ tend uniformément vers 0 dans X.
2. La série de terme général $a_n(x)$ est uniformément convergente dans X, et λ_0 est bornée.

122° Montrer que si une série entière de terme général $a_n x^n$ (où $a_n \in \mathbf{C}$) est convergente pour $x = 1$, elle est uniformément convergente dans l'intervalle $[0, 1]$.
En déduire, par exemple, en utilisant le développement classique de $\operatorname{Log}(1+x)$ en série entière, que

$$\operatorname{Log} 2 = 1 - 1/2 + 1/3 - \ldots + (-1)^{n+1}\, 1/n + \ldots$$

123° Montrer que la série $\big((-1)^n/(2n^{\frac{1}{2}} + \cos x)\big)$ (où $n \geqslant 1$) est uniformément convergente sur $\mathbf{R}$ et que sa somme est continue.

124° Montrer que la série de terme général

$$x \sin nx/(2\, n^{\frac{1}{2}} + \cos x), \qquad (\text{où } n \geqslant 1)$$

est uniformément convergente sur tout compact de l'intervalle ouvert $]-2\pi, 2\pi[$. Quel est le comportement de sa somme au voisinage du point 2π ?

125° Soit (a_n) une série convergente d'éléments d'un espace normé complet E. Etudier la convergence et la convergence uniforme des séries de terme général

$$\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right) a_n\,; \qquad \left(\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right) a_n \qquad (\text{où} \quad x \in [0, \infty[)\,.$$

126° Etudier la sommabilité et la sommabilité uniforme des familles de terme général :

x^{p+q} ; x^{pq} ; $(-1)^p x^{p(2q+1)}$ (où $p, q \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{C}$).

127° Soient X, Y deux espaces topologiques, $a \in X$, $b \in Y$, et (f_n) une suite d'applications de X dans Y telle que

$$\lim_{n \to \infty} f_n(a) = b.$$

On dit que la suite (f_n) converge uniformément au point a si, pour tout voisinage V de b dans Y, il existe un voisinage U de a dans X, et un entier n_0, tels que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $f_n(U) \subset V$.

a) Montrer que si la suite (f_n) converge simplement dans X vers une application f, et si b a une base de voisinages fermés, la convergence uniforme de la suite (f_n) en a, et la continuité des f_n en a entraîne la continuité de f en a.

b) On suppose que Y est un espace normé, et on se donne une suite (g_n) d'applications de X dans Y, continues en a, telles que $\Sigma \|g_n(x)\|$ soit partout finie, et continue en a. Montrer que la série (g_n) converge uniformément en a.

*128° Soit (f_i) une famille d'applications continues d'un espace topologique compact X dans un espace normé de dimension finie E. Montrer l'équivalence des énoncés suivants :

a) La famille des f_i est uniformément sommable.

b) La famille des $\|f_i(x)\|$ est sommable pour tout $x \in X$, et sa somme est une fonction continue de x.

Lorsque X n'est pas compact, montrer qu'on a encore l'implication $a \Rightarrow b$, mais qu'on n'a pas toujours $b \Rightarrow a$ (donner un exemple).

Familles multipliables et produits infinis de nombres complexes

129° En utilisant l'inégalité $1+x \leqslant e^x$ valable pour tout x réel, démontrer par récurrence, que pour toute famille finie (a_i) de nombres $\geqslant 0$ (resp. dans $[-1, 0]$, on a :

$$1 + \sum a_i \leqslant \prod (1+a_i) \leqslant \exp\left(\sum a_i\right).$$

En déduire simplement que pour toute famille $(a_i)_{i \in I}$ de nombres $\geqslant 0$ (resp. dans $[-1, 0]$), il y a équivalence entre la multipliabilité de la famille des $(1+a_i)$ et la sommabilité de la famille des (a_i).

130° Soit (a_n) une suite de nombres $\geqslant 0$ (avec $a_0 > 0$); on pose

$$b_n = a_n/(a_0+a_1+\dots+a_n).$$

Montrer que les séries (a_n) et (b_n) convergent et divergent simultanément, et que lorsqu'elles convergent, on a :

$$\frac{a_0}{\sum a_n} = \prod_1^\infty (1-b_n).$$

131° Soit (a_n) une suite de nombres $\geqslant 0$. Montrer que la série de terme général $a_n/(1+a_0)(1+a_1)\dots(1+a_n)$ est toujours convergente et a pour somme

$$1-\left(1/\prod_\iota (1+a_\iota)\right).$$

132° Soit $(a_\iota)_{\iota\in\mathrm{I}}$ une famille sommable d'éléments de $\mathbf{C}$; et désignons par $\mathscr{F}$ l'ensemble des parties finies de I. Pour tout $\mathrm{K}\in\mathscr{F}$, on pose

$$u_\mathrm{K} = \prod_{\iota\in\mathrm{K}} a_\iota \qquad (\text{et} \quad u_\mathrm{K} = 1 \text{ si } \mathrm{K} = \varnothing).$$

Montrer que la famille des u_K est sommable et que sa somme est égale à

$$\prod_\iota (1+a_\iota).$$

133° On désigne par P l'ensemble des nombres premiers $p \geqslant 2$. Déduire de l'exercice précédent que pour tout nombre $s > 1$, la famille des nombres $(1-p^{-s})^{-1}$, (où $p\in\mathrm{P}$), est multipliable et a pour produit la somme

$$\sum_0^\infty n^{-s}.$$

134° Par la même méthode, montrer que pour tout $x\in\mathbf{C}$ tel que $|x|<1$, la famille des $(1+x^{2^n})$ (où $n\in\mathbf{N}$) est multipliable et a pour produit $1/(1-x)$.

135° Soit x un élément de $\mathbf{C}$ tel que $|x|<1$; on pose :

$$\mathrm{Q}_1 = \prod_1^\infty (1+x^{2n}); \qquad \mathrm{Q}_2 = \prod_1^\infty (1+x^{2n-1}); \qquad \mathrm{Q}_3 = \prod_1^\infty (1-x^{2n-1}).$$

Montrer que $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_3 = 1$.

136° Soit k un nombre complexe tel que $|k|>1$. Pour tout $z\in\mathbf{C}$, on pose :

$$\mathrm{P}(z) = \prod_1^\infty (1+z/k^n).$$

a) Démontrer que ce produit est absolument convergent et que

$$\mathrm{P}(kz) = (1+z)\,\mathrm{P}(z).$$

b) On pose, pour tout $z\neq 0$:

$$\mathrm{S}(z) = \mathrm{P}(z)\,\mathrm{P}(1/z)\,(1+z).$$

Montrer que

$$\mathrm{S}(kz) = kz\,\mathrm{S}(z).$$

c) Soient $(a_1, a_2, ..., a_n)$ et $(b_1, b_2, ..., b_n)$ deux suites finies de nombres complexes $\neq 0$ tels que $a_1 a_2 ... a_n = b_1 b_2 ... b_n$; on pose :

$$\mathrm{M}(z) = \frac{\mathrm{S}(a_1 z) \dots \mathrm{S}(a_n z)}{\mathrm{S}(b_1 z) \dots \mathrm{S}(b_n z)}.$$

Montrer que $\mathrm{M}(z) = M(kz)$; qu'en déduire pour la fonction $u \longrightarrow \mathrm{M}(e^u)$?

d) Montrer que P est limite uniforme sur tout compact de **C**, de polynômes en z. Qu'en conclure pour P ? Etudier de même S et M.

137° Montrer que le produit infini $\prod_n (1+i/n)$ n'est pas convergent, mais que le produit infini des valeurs absolues $|1+i/n|$ est convergent.

138° Soit (u_n) une suite de nombres complexes telle que :

$$|u_n| \leqslant kn^{-\alpha} \qquad \text{(où } k > 0 \text{ et } \alpha > 0\text{)}.$$

Montrer qu'il existe un entier p, ne dépendant que de α, tel que la convergence du produit infini des $(1+u_n)$ soit équivalente à la convergence de la série de terme général

$$v_n = u_n - u_n^2/2 + \dots + (-1)^{p+1} u_n^p/p.$$

139° En utilisant le fait que le groupe topologique multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$ est isomorphe au groupe additif **R**, définir sur $\mathbf{R}_+^*$ une distance compatible avec la topologie de $\mathbf{R}_+^*$ et invariante par les « translations » de ce groupe.
Montrer que $\mathbf{R}_+^*$ muni d'une telle distance est complet.

140° On désigne par U le groupe multiplicatif des nombres complexes z tels que $|z| = 1$, muni de la topologie induite par celle de **C**.

a) En utilisant le fait que le groupe topologique $\mathbf{C}^*$ est isomorphe au produit $\mathbf{R}_+^* \times \mathrm{U}$, montrer qu'il existe sur $\mathbf{C}^*$ une distance compatible avec sa topologie, et invariante par les « translations » de $\mathbf{C}^*$.

b) Montrer que $\mathbf{C}^*$ muni d'une telle distance est complet.

c) En déduire une nouvelle démonstration du fait que toute famille d'éléments de $\mathbf{C}^*$ satisfaisant au critère de Cauchy (pour la multiplication) est multipliable dans $\mathbf{C}^*$.

Algèbres normées

141° Montrer que toute norme sur **C** (considéré comme espace vectoriel sur **R**) qui vérifie la relation $\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$ est identique à la norme classique. Aurait-on la même conclusion si on supposait seulement que $\|x^2\| = \|x\|^2$ pour tout x ?

142° Est-ce que la norme

$$\|f\| = \sup |f(x)| + \sup |f'(x)| + \dots + \sup |f^{(n)}(x)|$$

sur l'espace vectoriel $\mathscr{C}^{(n)}([0, 1], \mathbf{R})$ est compatible avec sa structure d'algèbre ?

143° Soient $(a_n X^n)$ et $(b_n U^n)$ deux séries formelles à coefficients complexes, la seconde étant telle que $b_0 = 0$.
Soit $(c_n U^n)$ la série formelle obtenue par substitution à X de la somme formelle $\Sigma b_n U^n$.
Soit A une algèbre de Banach ; on suppose que les séries $(a_n X^n)$ et $(b_n U^n)$ ont des rayons de convergence égaux respectivement à α et β ; et on pose :

$$f(x) = \Sigma a_n x^n \text{ pour tout } x \text{ tel que } \|x\| < \alpha ;$$
$$g(u) = \Sigma b_n u^n \text{ pour tout } u \text{ tel que } \|u\| < \beta.$$

Montrer que pour tout u tel que $\|u\| < \beta$ et $\Sigma |b_n| \cdot \|u\|^n < \alpha$, la série $(c_n u^n)$ est absolument convergente, et que sa somme est égale à $f(g(u))$.

144° Soit A une algèbre de Banach munie d'une unité e.
a) Montrer que pour tout $u \in$ A tel que $\|u\| < 1$, la série entière

$$u - u^2/2 + \ldots + (-1)^{n+1} u^n/n + \ldots$$

est convergente et que sa somme est continue dans la boule ouverte B (O, 1) ; on désignera cette somme par Log $(e+u)$.
b) Montrer, en utilisant l'exercice précédent, que :

$$\exp(\text{Log}(e+u)) = e+u \qquad \text{pour tout } u \in \text{B (O, 1)}.$$
$$\text{Log}(\exp x) = x \qquad \text{pour tout } x \text{ tel que } \|x\| < \tfrac{1}{2}.$$

En déduire que l'image de la boule ouverte B (O, $\frac{1}{2}$) par l'application $x \longrightarrow \exp x$ est un voisinage ouvert de e, et que la restriction de cette application à B (O, $\frac{1}{2}$) est une homéomorphie.

Propriétés élémentaires des espaces préhilbertiens

145° Soit f une forme bilinéaire quelconque sur un espace vectoriel E sur **C**. Montrer qu'il existe des $x \neq$ O dans E tels que $f(x, x) = 0$.

146° Soit E un espace normé sur **K** ; montrer que si pour tout sous-espace vectoriel F de dimension 2 de E, la norme de F est associée à un produit scalaire sur F, la norme de E est aussi associée à un produit scalaire sur E.

147° Soit E un espace normé sur **K** tel que, pour tous $x, y \in$ E on ait

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Montrer que la norme de E est associée à un produit scalaire.

148° Appelons forme quadratique sur un espace vectoriel E sur **R** toute application f de E dans **R** telle que pour tous $x, y \in$ E, et tous $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, on ait :

$$f(\lambda x + \mu y) = a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2,$$

où a, b, c ne dépendent que de x, y.

Montrer que $b(x, y)$ est une forme bilinéaire sur E, et que $b(x, x) = f(x)$. En déduire que si une norme p sur E est telle que p^2 soit une forme quadratique, $b(x, y)$ est un produit scalaire sur E, et p est la norme qui lui est associée.

149° Montrer que tout espace vectoriel E sur $\mathbf{K}$ peut être muni d'un produit scalaire (utiliser une base algébrique de E).

150° Appelons forme *sesquilinéaire* sur un espace vectoriel E (sur $\mathbf{K}$) toute application $(x, y) \longrightarrow f(x, y)$ de $E \times E$ dans $\mathbf{K}$ qui est linéaire en x et semi-linéaire en y.
Soit alors f une forme sesquilinéaire continue sur un espace normé E. On notera $b(f)$ $\big($resp. $q(f)\big)$ la borne inférieure des nombres positifs k tels que

$$|f(x, y)| \leqslant k \, \|x\| \cdot \|y\| \qquad (\text{resp. } |f(x, x)| \leqslant k \, \|x\|^2).$$

a) Montrer que l'on a : $q \leqslant b \leqslant 4q$.
b) Montrer que lorsque $f(x, x)$ est réel pour tout x, ou lorsque la norme de E est associée à un produit scalaire, on peut remplacer 4 par 2 ; et montrer que lorsque ces deux conditions sont satisfaites on a $q = b$.

151° Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbf{C}$, et soit f une forme sesquilinéaire sur E.
Montrer que l'image de $(E \dot{-} O)$ par l'application $x \longrightarrow f(x, x)/\|x\|^2$ est une partie convexe de $\mathbf{C}$. En déduire, en utilisant l'exercice 149 que pour toute forme sesquilinéaire f sur un espace vectoriel E, l'image de $(E \dot{-} 0)$ par l'application $x \longrightarrow f(x, x)$ est convexe.

152° Soient E, F deux espaces préhilbertiens sur $\mathbf{K}$, et soit f une application de E dans F telle que $f(O) = O$, et telle que pour tous $x, y \in E$,

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \quad (\text{autrement dit } f \text{ est une isométrie}).$$

Montrer que f est linéaire.

153° Montrer que la norme de l'espace $l^2_{\mathrm{I}}(E)$ défini dans l'exercice 82 ne peut être définie par un produit scalaire que lorsque l'espace E lui-même est préhilbertien.

154° Soit $(E_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'espaces préhilbertiens sur le même corps $\mathbf{K}$, dont on désignera les produits scalaires par $(x \mid y)_\iota$, et les normes par $\|x\|_\iota$. On désigne par F l'espace vectoriel des familles $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$ telles que $x_\iota \in E_\iota$ pour tout ι, et l'on pose pour tout $x \in F$:

$$f(x) = \sum_\iota (x_\iota \mid x_\iota)_\iota.$$

a) Montrer que l'ensemble E des x tels que $f(x) < \infty$ est un sous-espace vectoriel de F.
b) Montrer que pour tous $x, y \in E$, la famille des $(x_\iota \mid y_\iota)_\iota$ est sommable et que sa somme, qu'on notera $(x \mid y)$, est un produit scalaire sur E.

c) Montrer que l'espace préhilbertien E (qu'on appelle *somme hilbertienne* des E_i) est complet lorsque chacun des E_i est complet (et réciproquement).

155° Soit f une application continue de **R** dans **C** telle que

$$\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 \, dt < \infty .$$

Montrer que pour tout $a \in \mathbf{R}$, on a :

$$\left| \int_{\mathbf{R}} f(t) \, f(t-a) \, dt \right| \leqslant \int_{\mathbf{R}} f| \, (t) \, |^2 \, dt .$$

156° Soit (a_n) une suite d'éléments de **C** telle que $\Sigma |a_n|^2 < \infty$. Montrer que

$$\left| \sum a_n a_{n+1} \right| \leqslant \sum |a_n|^2 .$$

157° On désigne par P la partie de l'espace de Hilbert l^2 sur **R** constituée par les points $x = (x_n)$ tels que $|x_n| \leqslant 1/n$.
Montrer que P est une partie compacte de l^2 (on pourra utiliser le critère de compacité des espaces métriques et la proposition 9-*23*).

158° Soit D un domaine de $\mathbf{R}^n$, de volume total fini, et soit E l'ensemble des fonctions harmoniques réelles f dans D telles que l'intégrale de f^2 dans D soit finie :

a) Montrer que E est un espace vectoriel, et que

$$(f \mid g) = \int_{\mathrm{D}} f(x) \, g(x) \, dx$$

est un produit scalaire sur E. On désignera par $\|f\|$ la norme correspondante.

b) Montrer que pour toute $f \in \mathrm{D}$, on a :

$$\int_{\mathrm{D}} |f(x)| \, dx \leqslant k \, \|f\| .$$

en désignant par k une constante qu'on précisera.

c) Montrer, en utilisant une propriété de moyenne élémentaire des fonctions harmoniques, que si $\lim\limits_{n \to \infty} \|f_n\| = 0$, la suite des f_n converge uniformément vers O sur tout compact.

d) En déduire que l'espace préhilbertien E est complet.

159° Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E. Montrer que s'il existe un nombre $k \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{F}$ et tout $y \in \mathrm{G}$ on ait

$$|(x \mid y)| = k \, \|x\| \cdot \|y\| ,$$

c'est que, ou bien F et G sont de dimension 1, ou bien $k = 0$, c'est-à-dire que F et G sont orthogonaux.

160° Soit E un espace préhilbertien sur **K**, et soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E non réduits à $\{O\}$. On appellera *angle de* F, G, l'angle α défini par :

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \pi ; \qquad \cos \alpha = \sup \frac{|(u \mid v)|}{\|u\| \cdot \|v\|} \qquad \text{où } u \in \mathrm{F}, \ v \in \mathrm{G} .$$

Désignons alors par φ l'application $(u, v) \longrightarrow u+v$ de l'espace normé $F \times G$ sur le sous-espace $(F+G)$ de E.
Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que φ soit une homéomorphie est que $\alpha \neq 0$.

161° Soient X, Y deux espaces normés isomorphes à l^2 ; soit φ l'application de X dans Y ainsi définie :
Si $x = (x_n)$, $\varphi(x)$ est le point $(n^{-1} x_n)$.
Montrer que le graphe Γ de φ dans $X \times Y$ est un sous-espace vectoriel fermé de $X \times Y$ isomorphe à X.
Montrer que, si l'on désigne par X' le sous-espace $X \times O$ de $X \times Y$, $(X'+\Gamma)$ est partout dense dans $X \times Y$ mais ne lui est pas identique.

162° Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbf{R}$, et munissons $E \times E$ de sa structure de somme hilbertienne des espaces facteurs (exercice 154). Soit f une application linéaire bijective de E sur E conservant la norme.
Pour tout $k \in \mathbf{R}$, désignons par $\Gamma(k, f)$ le graphe, dans $E \times E$, de l'application $x \longrightarrow kf(x)$ de E dans E. Montrer que l'angle α de tout vecteur de $\Gamma(k, f)$ avec $\Gamma(k', f)$ est une constante définie par la relation :

$$\cos \alpha = \frac{|1+kk'|}{(1+k^2)^{\frac{1}{2}}(1+k'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Projection orthogonale. Etude du dual

163° Soit X une partie convexe complète d'un espace préhilbertien E sur $\mathbf{R}$. En utilisant le théorème 15-*1*, montrer que X est une intersection de demi-espaces affines fermés de E (définis comme ensembles de la forme $\{x : f(x) \leqslant k\}$, où $f \in E'$ et $k \in \mathbf{R}$).
Montrer que lorsque X est un cône, X est une intersection de demi-espaces fermés de la forme $\{x : f(x) \leqslant 0\}$, où $f \in E'$.

164° Soit (X_n) une suite décroissante de convexes complets d'un espace préhilbertien E. Pour tout $x \in E$, on désigne par $d_n(x)$ la distance de x à X_n, et on pose

$$d(x) = \lim_{n \to \infty} d_n(x).$$

Montrer que si pour au moins un x, $d(x) < \infty$, il en est de même pour tout x ; nous nous placerons désormais dans ce cas. On désigne alors par $A(x, \varepsilon, n)$, l'intersection de X_n et de la boule fermée de centre x et de rayon $(d(x)+\varepsilon)$.

a) Montrer que lorsque ε tend vers 0 et n vers $+\infty$, le diamètre de $A(x, \varepsilon, n)$ tend vers 0.

b) En déduire que l'intersection X des X_n n'est pas vide, et que

$$d(x) = d(x, X).$$

165° Soit Y un convexe complet et borné d'un espace préhilbertien E, et soit f une fonction numérique convexe et semi-continue inférieurement sur Y. Montrer, en utilisant l'exercice précédent, que f est bornée inférieurement sur Y, et que l'ensemble des points x de Y où f atteint sa borne inférieure est un convexe complet non vide.

Donner une application de cette propriété aux formes linéaires continues sur E, et comparer avec l'exemple de l'exercice 43.

166° Soient A, B deux convexes complets d'un espace préhilbertien E, dont l'un au moins soit borné. Montrer qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que

$$d(a, b) = d(A, B).$$

167° Etendre l'énoncé de l'exercice précédent au cas où A et B ne sont pas bornés, mais où $d(x, y)$ tend vers l'infini lorsque $\|x\|$ et $\|y\|$ tendent vers l'infini avec $x \in A$ et $y \in B$. Montrer par un exemple dans $\mathbf{R}^2$ que si cette condition n'est pas satisfaite, l'énoncé peut devenir inexact.

168° Soit (C_n) une suite croissante de parties convexes complètes d'un espace préhilbertien E, telle que $C = \overline{\bigcup C_n}$ soit aussi complète.

Pour tout $x \in E$, on désigne par $P_n(x)$ $\big($resp. $P(x)\big)$ la projection de x sur C_n (resp. C) ; montrer que

$$P(x) = \lim_{n \to \infty} P_n(x).$$

169° Soient E un espace préhilbertien sur $\mathbf{R}$, C une partie convexe complète de E, et f une forme linéaire continue sur E.

Montrer qu'il existe un point unique de C en lequel $\|x\|^2 + f(x)$ atteint sa borne inférieure.

170° Soient E un espace préhilbertien, E′ son dual topologique. Pour tout $a \in E$, désignons par φ_a la forme linéaire $x \longrightarrow (x \mid a)$ sur E. Montrer que l'image $\varphi(E)$ de E dans E′ par l'application semi-linéaire φ est un sous-espace vectoriel partout dense de E′.

En déduire que tout espace préhilbertien E est isomorphe à un sous-espace partout dense d'un espace de Hilbert.

171° Soient V_1, V_2 deux variétés affines d'un espace préhilbertien E, et soient $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$.

Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

a) $d(x_1, x_2) = d(V_1, V_2)$.

b) $(x_1 - x_2)$ est orthogonal à V_1 et V_2.

172° Soit E un espace de Hilbert réel, et soit P un cône convexe fermé de E. On désigne par P^* l'ensemble des $x \in E$ tels que $(x \mid y) \leqslant 0$ pour tout $y \in P$.

Montrer que P^* est aussi un cône convexe fermé et que $(P^*)^* = P$ (utiliser l'exercice 163).

173° Soit E un espace de Hilbert réel, et soient P, Q deux cônes convexes fermés de E tels que $P^* = Q$ (d'où aussi $Q^* = P$ d'après l'exercice précédent).

Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

a) $z = x+y, \qquad x \in P, \qquad y \in Q\,; \qquad (x|y) = 0.$

b) $x =$ projection de z sur P ; $\qquad y =$ projection de z sur Q.

* 174° Soient E un espace préhilbertien, et F un sous-espace vectoriel de E tel que $F = F^{\circ\circ}$.

Montrer par un exemple qu'il n'est pas exact que tout point x de E admette une projection $P(x)$ sur F.

175° Soit P une application d'un espace préhilbertien dans lui-même qui vérifie les relations

$$\big(P(x)\,|\,y\big) = \big(x\,|\,P(y)\big)\,; \qquad P\big(P(x)\big) = P(x)\,,$$

pour tous $(x, y) \in E$.

Montrer que P est linéaire et continue ; puis montrer que si on pose

$$F = \{x \,:\, P(x) = x\},$$

on a $F = F^{\circ\circ}$, et que P est identique à l'opérateur de projection de E sur F.

176° Soit E un espace préhilbertien. Montrer que si P est une application linéaire de E dans E telle que $P^2 = P$ et $\|P\| \leqslant 1$, P est un opérateur de projection.

177° *a*) Montrer que si $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont des opérateurs de projection (sur un espace préhilbertien E), dire que $(P_1 + \ldots + P_n)$ est un opérateur de projection équivaut à dire que $P_i \circ P_j = O$ pour $i \neq j$.

b) On suppose maintenant E complet. Montrer que si (P_n) est une suite infinie d'opérateurs de projection tels que $P_i \circ P_j = O$ pour $i \neq j$, la famille des P_n est sommable dans $\mathscr{L}(E)$ et a pour somme un opérateur de projection.

178° Soit E un espace de Hilbert, et soit A un élément de $\mathscr{L}(E)$.

a) Montrer que pour tout $y \in E$, l'application $x \longrightarrow (Ax\,|\,y)$ est une forme linéaire sur E ; en déduire qu'il existe un élément unique A^*_y de E tel que pour tout $x \in E$, on ait $(Ax\,|\,y) = (x\,|\,A^*_y)$.

b) Montrer que l'application $y \longrightarrow A^*_y$ de E dans E est linéaire, et que la norme de A^* est égale à celle de A.

On appellera A^* l'opérateur *adjoint* de l'opérateur A ; et on dira que A est *auto-adjoint* (ou hermitien) si $A = A^*$, autrement dit si l'on a l'identité

$$(Ax\,|\,y) = (x\,|\,Ay).$$

c) Plus généralement soit E un espace préhilbertien, et soient $A, B \in \mathscr{L}(E)$; on dira que B est *adjoint* de A si $(Ax\,|\,y) = (x\,|\,By)$ pour tous $x, y \in E$.

Montrer que tout $A \in \mathscr{L}(E)$ possède au plus un adjoint, et que si B est adjoint de A, A est adjoint de B.

179° Démontrer les propriétés élémentaires suivantes :

a) $(AB)^* = B^* A^*$.

b) Si A et B sont auto-adjoints, dire que AB l'est aussi, équivaut à dire que $AB = BA$.

c) Si A est auto-adjoint, $B^* AB$ l'est aussi quel que soit B.

d) Si $A = A^*$, dire que $(Ax \mid x) = 0$ pour tout x équivaut à dire que $A = O$.

e) Dire que $A = A^*$ équivaut à dire que $(Ax \mid x)$ est réel pour tout x.

180° Soit $(k_\iota)_{\iota \in I}$ une famille bornée d'éléments de $\mathbf{C}$, et soit A l'application de l'espace complexe l^2_I dans lui-même ainsi définie :
Si $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$, Ax est l'élément $(k_\iota x_\iota)_{\iota \in I}$.
Quelle est la norme de A ? Quel est son adjoint ? Quand A est-il auto-adjoint ?

181° Désignons par E l'espace $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{C})$ muni du produit scalaire

$$(x \mid y) = \int_0^1 x(t)\, \bar{y}(t)\, dt ;$$

soit $k \in E$ et soit $K \in \mathscr{C}([0, 1]^2, \mathbf{C})$. On définit les éléments A, B de $\mathscr{L}(E)$ par les relations :

$$Ax(t) = \int_0^1 K(t, u)\, x(u)\, du ; \qquad Bx(t) = k(t)\, x(t) .$$

a) Montrer que A, B possèdent des adjoints, bien que E ne soit pas complet ; à quelles conditions A et B sont-ils auto-adjoints ?

b) Pour tout $x \in E$, on pose

$$Cx(t) = \int_0^1 k(t)\, u^{-\frac{1}{4}}\, x(u)\, du , \qquad \text{où } k \in E .$$

Montrer que $C \in \mathscr{L}(E)$ et calculer sa norme, et montrer que C n'a pas d'adjoint qui opère dans E.

182° Soit E un espace préhilbertien, et soit A un élément de $\mathscr{L}(E)$ qui admette un adjoint A^*; on dit que A est *positif* si $A = A^*$ et si $(Ax \mid x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$. On dit que A est *défini positif* si en outre $(Ax|x) \neq 0$ pour tout $x \neq 0$.
Caractériser ceux des opérateurs étudiés dans les exemples précédents, qui soient positifs ou définis positifs.

183° Soit E un espace préhilbertien, et soit $A \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

a) $A^* A = I$ (où I désigne l'identité).

b) $(Ax \mid Ay) = (x \mid y)$ pour tous $x, y \in E$.

c) $\|Ax\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$.

Lorsque A possède ces propriétés, on dit que A est *unitaire* (ou orthogonal lorsque le corps **K** est **R**), ou plus simplement que A est une isométrie.

184° Soit E un espace préhilbertien, et soit $A \in \mathscr{L}(E)$; on dira que A est une *symétrie* si $(I+A)/2$ est un opérateur de projection.
En utilisant l'exercice précédent et l'exercice 175, montrer que les symétries ne sont autres que les opérateurs à la fois unitaires et auto-adjoints.

185° Soit (x_n) une suite de points d'un espace préhilbertien E; montrer qu'il revient au même de dire que (x_n) converge fortement vers O, ou que la suite $(x_n \mid a)$ converge vers 0, uniformément sur l'ensemble des a tels que $\|a\| \leqslant 1$. Etendre cette propriété aux bases de filtre.

*186° Soit (x_n) une suite de points d'un espace de Hilbert E telle que, pour tout $a \in E$, la suite $(x_n \mid a)$ ait une limite. Montrer que les x_n convergent faiblement vers un point x de E, que la suite des $\|x_n\|$ est bornée, et que $\|x\| \leqslant \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|$.
(On pourra utiliser les exercices 60 et 61.)

*187° Soit (x_n) une suite de points d'un espace de Hilbert E. Montrer que si cette suite converge faiblement vers un point x, il existe une sous-suite (x_{α_n}) telle que la suite (b_n), où

$$b_n = 1/n \sum_1^n x_{\alpha_p} ,$$

converge fortement vers x.

188° Montrer que dans un espace préhilbertien E de dimension infinie le point O n'a pas une base dénombrable de voisinages pour la topologie faible. En déduire que la topologie faible de E ne peut pas être définie par une distance.

189° Soient E un espace préhilbertien; (x_n) une suite *bornée* de points de E; et X une partie totale de E.
Montrer que, pour que la suite (x_n) converge faiblement vers un point x, il faut et il suffit que pour tout $a \in X$ la suite $(x_n \mid a)$ converge vers $(x \mid a)$.
Montrer par contre qu'on peut trouver dans l^2 une suite (x_n) non bornée (donc ne pouvant pas converger faiblement) et une partie totale X de l^2 (par exemple la base orthonormale canonique de l^2) telles que, pour tout $a \in X$, la suite $(x_n \mid a)$ converge vers 0.

190° Soit E l'espace $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{K})$ muni du produit scalaire

$$(x \mid y) = \int_0^1 x(t)\, \bar{y}(t)\, dt .$$

On pose $$x_n(t) = \sin \pi n t ;$$

montrer, en utilisant la partie totale X de E constituée par les fonctions

sin πpt et cos πpt, et l'exercice précédent, que la suite (x_n) converge faiblement vers O.

Plus généralement, soit (x_n) une suite de fonctions à dérivées x'_n continues sur [0, 1] et telles que

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sup_t | x_n(t) | \right) = 0 ;$$

montrer que la suite (x'_n) converge faiblement vers O dans E.

Systèmes orthogonaux

191° Soit E un espace préhilbertien ; pour toute suite finie $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de points de E, on appelle *déterminant de Gram* des x_i le scalaire $G(x_1, x_2, ..., x_n)$ égal au déterminant des produits scalaires $(x_i | x_j)$.

a) Montrer que $G(x_1, ..., x_n) \geqslant 0$ et que la relation $G(x_1, ..., x_n) > 0$ équivaut à dire que les x_i sont linéairement indépendants (utiliser une base orthonormale dans l'espace vectoriel engendré par les x_i).

b) Montrer que si les x_i sont linéairement indépendants, la distance d'un point x quelconque de E à l'espace vectoriel L engendré par les x_i a son carré égal à $G(x, x_1, ..., x_n)/G(x_1, ..., x_n)$. (Utiliser la projection de x sur L.)

192° Montrer que tout espace de Hilbert E de dimension infinie est isomorphe à un sous-espace vectoriel de E distinct de E.

193° Soit E un espace préhilbertien muni d'une base orthonormale infinie B, Montrer que pour toute partie partout dense X de E, on a $\overline{\overline{X}} \geqslant \overline{\overline{B}}$, et montrer qu'il existe un des X pour lequel $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{B}}$.

194° Soit E un espace vectoriel topologique quelconque, et soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E. On dira que cette famille est *topologiquement libre* si pour tout $i \in I$, a_i n'appartient pas à l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par les a_j d'indice $j \neq i$.

a) Montrer que dans un espace préhilbertien, toute famille orthogonale est topologiquement libre.

b) Montrer que toute famille topologiquement libre est algébriquement libre, et montrer par un exemple que l'inverse peut être faux.

195° Soit E un espace vectoriel topologique, et soit B une base algébrique de E qui soit topologiquement libre.

Montrer que le sous-espace vectoriel de E engendré par une partie quelconque de B est fermé.

a) En déduire, en utilisant l'exercice 65, que si E est un espace de Banach, E est nécessairement de dimension finie.

b) Donner un exemple où B est infini et E normé (forcément non complet).

196° Soit E un espace vectoriel topologique. On dira qu'une partie A de E est *topologiquement très libre* si elle ne contient pas O, et si pour toute partition de A en sous-ensembles non-vides A_1, A_2, les espaces vectoriels engendrés par A_1 et A_2 ont des adhérences dont l'intersection est $\{O\}$.

a) Vérifier que tout système orthogonal d'un espace préhilbertien est topologiquement très libre.

b) Vérifier que la « base » canonique de tout espace l^p_I possède aussi cette propriété.

* *c*) Montrer par un exemple que, même dans un espace préhilbertien, une famille peut être topologiquement libre sans être très libre.

197° Soit E l'espace $\mathscr{C}([0,1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire

$$(x|y) = \int_0^1 x(t)\, y(t)\, dt\,.$$

Soit K un compact non-vide et non-dense de [0, 1] ; et désignons par A_K le sous-espace vectoriel de E constitué par les fonctions qui s'annulent en tout point de K.

a) Montrer que tout $x \in E$ tel que $x \perp A_K$ est $= O$.

b) Montrer que si la mesure de K est nulle (en ce sens que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement de K par une famille finie d'intervalles dont la somme des longueurs est $< \varepsilon$), on a $\overline{A_K} = E$. Sinon, montrer que $\overline{A_K} \neq E$.

c) En déduire qu'il existe dans E des systèmes orthogonaux maximaux et non totaux.

198° Soit E le sous-espace vectoriel de l'espace réel l^2 engendré par les vecteurs de la base canonique de l^2 d'indice impair et par les vecteurs

$$x_k = (1/1^k, \ldots, 1/n^k, \ldots)$$

(où $k \in \mathbf{N}^*$).

Montrer que dans E le système orthogonal constitué par les vecteurs de la base canonique de l^2 d'indice impair est maximal.

199° Soit E un espace préhilbertien non complet. Montrer, en utilisant l'exercice 170, qu'il existe dans E un hyperplan fermé H tel qu'il n'existe aucun $x \neq O$ de E orthogonal à H.

200° Soit $\mathscr{B}_2$ l'espace de Besicovitch d'ordre 2 défini dans l'exercice 59. Pour tous $x, y \in \mathscr{B}_2$, posons

$$[x, y] = \limsup_{a \to \infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} |x(t)\, y(t)|\, dt\,.$$

a) Montrer que $[x, y] < \infty$, et plus précisément que $[x, y] \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$. Montrer que $[x, y]$ est un sous-produit scalaire au sens de l'exercice 35.

b) Soit A un sous-espace vectoriel de S_2 (voir exercice 59). Montrer que pour tous $x, y \in A$,

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} x(t)\, \bar{y}(t)\, dt$$

a une limite finie, qu'on notera $(x|y)$ lorsque $a \to \infty$. En déduire que l'image canonique de A dans $\mathscr{B}_2$ est un espace préhilbertien.

c) Désignons par P l'espace vectoriel des combinaisons linéaires de fonctions $e^{i\lambda t}$ (où $\lambda \in \mathbf{R}$).
Montrer que $P \subset S_2$ et montrer que la famille des fonctions $e^{i\lambda t}$ est un système orthonormal dans l'espace préhilbertien P.
En déduire que l'image canonique de P dans $\mathscr{B}_2$ a une fermeture $\mathscr{P}$ qui est un espace de Hilbert de dimension hilbertienne égale à la puissance du continu.

d) Montrer que tout élément x de $\mathscr{P}$ est somme, dans $\mathscr{P}$, d'une suite de fonctions $a_n e^{i\lambda_n t}$ (où les λ_n sont distincts), telle que $\Sigma |a_n|^2 < \infty$, et qu'inversement toute suite de cette nature est sommable dans $\mathscr{P}$.

e) On étudiera successivement les suites obtenues en faisant $a_n = n^{-2}$, λ_n quelconque ; puis $a_n = n^{-1}$, $\lambda_n = n^{-1}$.
Comment expliquer la difficulté rencontrée dans le deuxième exemple ?

Polynômes orthogonaux

201° Soit E la partie de $\mathscr{C}([0,1], \mathbf{R})$ constituée par les fonctions x telles que

$$\int_0^1 x^2(t)\, dt/t < \infty\,.$$

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}([0,1], \mathbf{R})$ et que toute fonction x qui a une dérivée finie en 0 et telle que $x(0) = 0$ appartient à E.

b) Pour tous $x, y \in E$, on pose :

$$(x|y) = \int_0^1 x(t)\, y(t)\, dt/t\,.$$

Vérifier que cette intégrale a un sens et que c'est un produit scalaire sur E.

c) Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt appliqué à la suite (t^n) (où $n \geqslant 1$) fournit les polynômes $P_1, ..., P_n, ...$ Calculer explicitement P_1, P_2, P_3.

d) Montrer que dans l'espace préhilbertien E, l'ensemble des fonctions x qui sont nulles dans un intervalle de la forme $[0, a]$ (où $a \neq 0$), est partout dense. En déduire que la famille orthogonale (P_n) est totale dans E.

202° Même problème en remplaçant le poids t^{-1} par $t^{-\alpha}$ (où $\alpha \in \mathbf{R}_+$).

203° Soit p une fonction $\geqslant 0$ et continue sur l'intervalle ouvert $\mathrm{I} =]-1, 1[$ telle que :

a) L'ensemble des points t de I en lesquels $p(t) \neq 0$ est partout dense dans I.

b) Il existe un polynôme A non identiquement nul tel que

$$\int_{\mathrm{I}} \mathrm{A}^2(t)\, p(t)\, dt < \infty .$$

Soit alors E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}([0, 1], \mathbf{R})$ constitué par les fonctions x telles que

$$\|x\|^2 = \int_{\mathrm{I}} x^2(t)\, p(t)\, dt < \infty .$$

Montrer, par une méthode analogue à celle de l'exercice 201 que l'ensemble des polynômes de la forme $\mathrm{A} \cdot \mathrm{P}$ (où P est un polynôme) est total dans l'espace E muni de la norme hilbertienne $\|x\|$.

204° On pose

$$\mathrm{Q}_n(t) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n .$$

a) Montrer, en utilisant des intégrations par parties, que la suite des polynômes Q_n est un système orthogonal sur $[-1, 1]$ pour le produit scalaire

$$(x \mid y) = \int_{-1}^{1} x(t)\, \bar{y}(t)\, dt ,$$

et que

$$(\mathrm{Q}_n \mid \mathrm{Q}_n) = \frac{2}{2n+1} .$$

b) Vérifier que $\mathrm{Q}_n(1) = 1$ et en déduire que Q_n est lié au polynôme de Legendre P_n défini dans le cours par la relation :

$$\mathrm{Q}_n(t) = \mathrm{P}_n(t) / \mathrm{P}_n(1) ,$$

et calculer $\mathrm{P}_n(1)$.

c) Montrer que les Q_n vérifient la relation de récurrence

$$n\, \mathrm{Q}_n = (2n-1)\, \mathrm{Q}_{n-1} - (n-1)\, \mathrm{Q}_{n-2}$$

et que tout Q_n vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}\left((1-t^2) \frac{d\mathrm{Q}_n}{dt}\right) + n(n+1)\, \mathrm{Q}_n = 0 .$$

205° Soit E l'espace préhilbertien E_p (voir 17-*3*) obtenu pour $p(t) = e^{-t}$ sur l'intervalle $[0, \infty[$.

a) On pose

$$\mathrm{L}_n(t) = \frac{1}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t} t^n) .$$

Vérifier que L_n est un polynôme de degré n, que les L_n constituent un système orthogonal dans E, et calculer $(\mathrm{L}_n \mid \mathrm{L}_n)$.

b) Vérifier que $L_n(0) = 1$, et en déduire que L_n est lié au polynôme de Laguerre P_n défini dans le cours par la relation :

$$L_n(t) = P_n(t)/P_n(0),$$

et calculer $P_n(0)$.

c) Montrer que pour tout $\alpha \geqslant 0$, la fonction $e^{-\alpha t}$ appartient à E, et calculer ses coefficients de Fourier $\gamma_{n,\alpha}$ par rapport au système orthogonal (L_n).

d) Montrer que la famille des $\gamma_{n,\alpha} L_n$ a pour somme dans E la fonction $e^{-\alpha t}$.

e) Montrer, grâce à un changement de variable convenable et au théorème de Stone-Weierstrass, que les fonctions e^{-nt} ($n \in \mathbf{N}$) forment un système total dans E.

f) Déduire des questions (*e*) et (*d*) que les polynômes L_n constituent une base orthogonale de E.

206° *a*) Vérifier que la dérivée d'ordre n de e^{-t^2} est de la forme $(-1)^n H_n(t)\, e^{-t^2}$, où H_n est un polynôme de degré n.

b) Montrer que les polynômes H_n sont orthogonaux dans l'espace E_p associé au poids $p(t) = e^{-t^2}$ sur $[0, \infty[$. En déduire qu'ils sont proportionnels à ceux qu'on a appelés polynômes d'Hermite dans le cours.

c) Vérifier la relation de récurrence :

$$H_n = 2t\,H_{n-1} - 2(n-1)\,H_{n-2}\,; \qquad H_0 = 1\,; \qquad H_1(t) = 2t.$$

d) Montrer que H_n satisfait à l'équation différentielle

$$H_n'' - 2t\,H_n' + 2n\,H_n = 0$$

et que

$$H_n' = 2n\,H_{n-1}.$$

VI. — INDEX TERMINOLOGIQUE DU CHAPITRE VII (1)

(1) Les chiffres de ce tableau renvoient aux paragraphes et à leurs subdivisions, ainsi qu'aux exercices.

Notations

VII. — BIBLIOGRAPHIE

BOURBAKI, N., *Topologie générale, groupes topologiques; nombres réels,* chapitres 3 et 4, n° 906.

—, *Espaces vectoriels topologiques,* chapitres 1 et 2, n° 1189.

—, *Algèbre, formes sesquilinéaires et formes quadratiques,* chapitre 9, n° 1272. Actualités Sci. et Ind., Hermann et Cie, Paris.

DIEUDONNÉ, J., *Foundations of Modern Analysis,* Academic Press, N.Y. 1960.

HALMOS, P., *Finite dimensional vector spaces,* D. Van Nostrand, N.Y.. 1958.

—, *Introduction to Hilbert space,* New York, 1951.

LAWRENCE GRAVES, *The theory of functions of real variables,* MacGraw Hill, Book Company, 1956.

E. J. MACSHANE et P. A. BOTTS, *Real Analysis,* Van Nostrand, Princeton 1959.

OSTROWSKI, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung,* Bâle, 1951.

Ouvrages d'un niveau plus élevé (niveau Recherche)

DUNFORD, N. et SCHWARTZ, J. T., *Linear operators* I, Interscience Publ., 1958.

FRIEDRICHS, *Functional Analysis and applications,* New York University, 1949.

HILLE et PHILLIPS, *Functional Analysis and semi-groups*, Colloquium Publ., 1957.
LOOMIS, L., *An introduction to abstract harmonic Analysis*, D. Van Nostrand, N.Y., 1958.
RIESZ, F. et NAGY, B. S., *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Académie des Sciences, Budapest, 1952.
STONE, M. H., *Linear transformations in Hilbert space*, Colloquium Publ., 1932.

VIII. — DÉFINITIONS ET AXIOMES

Il ne s'agira que d'espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$ (où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$).

AXIOMES DES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES. — Un espace vectoriel topologique est un ensemble E muni d'une structure d'espace vectoriel et d'une topologie telles que :

EVT 1 : La topologie de E est compatible avec la structure de groupe additif de E ;

EVT 2 : L'application $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ de $\mathbf{K} \times E$ dans E est continue.

ENSEMBLE TOTAL. — Une partie X d'un e.v.t. E est dite *totale* si l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X est partout dense dans E.

SEMI-NORME. — Une *semi-norme* sur un espace vectoriel E est une application p de E dans $\mathbf{R}_+$ telle que, pour tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbf{K}$ on ait :

1. $$p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x) ;$$
2. $$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y).$$

On dit que p est une *norme* si $p(x) \neq 0$ pour tout $x \neq O$.

On appelle *p-boule* ouverte de centre a dans E tout ensemble de la forme $\{x : p(x-a) < \rho\}$, où $\rho > 0$.

$\mathscr{P}$-TOPOLOGIE SUR UN ESPACE VECTORIEL E. — Soit $\mathscr{P} = (p_i)$ une famille de semi-normes sur E. On appelle *$\mathscr{P}$-boule ouverte* de centre a dans E toute intersection finie de p_i-boules ouvertes de centre a.

On appelle *$\mathscr{P}$-topologie* sur E la topologie dont les ouverts sont les réunions quelconques de $\mathscr{P}$-boules ouvertes.

ESPACE NORMÉ. — On appelle *espace normé* tout espace vectoriel muni d'une norme p.

On le munit de la topologie associée à la distance $d(x, y) = p(x, y)$.

Lorsqu'il est complet pour cette distance, on l'appelle *espace de Banach*.

FAMILLES SOMMABLES DANS UN GROUPE TOPOLOGIQUE COMMUTATIF ET SÉPARÉ G. — Une famille $(a_i)_{i \in I}$ d'éléments de G est dite *sommable* et de somme A (où A $\in$ G) si, pour tout voisinage V de A, il existe une partie finie J_0 de I telle que, pour toute partie finie J de I contenant J_0, on ait :

$$\sum_{i \in J} a_i \in V.$$

FAMILLES ABSOLUMENT SOMMABLES DANS UN ESPACE NORMÉ E. — Une famille (a_i) d'éléments de E est dite *absolument* sommable si la famille de leurs normes $\|a_i\|$ est sommable dans **R**.

FAMILLES MULTIPLIABLES DANS **C**. — Une famille $(a_i)_{i \in I}$ d'éléments de **C** est dite *multipliable* dans **C** et de produit p si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J_0 de I telle que, pour toute partie finie J de I contenant J_0, on ait :

$$|p - \prod_{i \in J} a_i| \leqslant \varepsilon.$$

ALGÈBRE NORMÉE. — On appelle *algèbre normée* toute algèbre sur **K** munie d'une norme telle que $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

Lorsqu'en outre elle est complète pour cette norme, on l'appelle *algèbre de Banach.*

FORME HERMITIENNE. — Une *forme hermitienne* sur un espace vectoriel E sur **K** est une application φ de $E \times E$ dans **K** telle que

1. Pour tout y, $\varphi(x, y)$ est linéaire par rapport à x.
2. Pour tous x, $y \in E$ on a $\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$.

Elle est dite *positive* si $\varphi(x, x) \geqslant 0$ pour tout x ; et *définie positive* si en outre $\varphi(x, x) \neq 0$ pour tout $x \neq O$; dans ce dernier cas on montre que $\varphi(x, x))^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur E.

ESPACE PRÉHILBERTIEN. — On appelle *espace préhilbertien* tout espace vectoriel E muni d'une forme hermitienne définie positive (notée en général $(x | y)$) et de la norme associée à cette forme.

Lorsque E est complet pour cette norme, on l'appelle *espace de Hilbert.*

BASE ORTHOGONALE. — On appelle *base orthogonale* d'un espace préhilbertien E toute famille (a_i) d'éléments non nuls de E telle que

1. Cette famille soit totale dans E ;
2. Les a_i soient orthogonaux deux à deux (c'est-à-dire $(a_i | a_j) = 0$ si $i \neq j$).

Lorsqu'en outre $\|a_i\| = 1$ pour tout i, la base est dite *orthonormale.*